

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу»

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЛАЗАРЕНКО Сергій Вікторович

УДК 519.7

ДИСЕРТАЦІЯ

**МЕТОДИ АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ
СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ**

01.05.04. – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ С.В. Лазаренко

Науковий керівник

Макаренко Олександр Сергійович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Лазаренка С.В. Методи аналізу нелінійних дискретних систем із антисипацією. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 «Системний аналіз і теорія оптимальних рішень». – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2019.

Підготовка роботи здійснювалась у Навчально-науковому комплексі «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Дисертація присвячена розвиненню математичних та розробці програмних засобів аналізу дискретних нелінійних систем із антисипацією.

Не зважаючи на те, що робіт в області дослідження систем із випередженням дуже мало, згадки про них зустрічаються досить давно – ще в працях Л.Е. Ельсгольца та С.Б. Норкіна. Новітні результати досліджень рівнянь із випередженням належать М.В. Азбелєву, Л.А. Бекларян, Д.А. Короткому, В.Г. Піменову, J. Yan. На сьогоднішній день в класі систем із випередженням значне місце займає група так званих антисипаційних систем (СА чи АС). Принципова складність таких систем безпосередньо впливає із основної їх властивості: поточні стани представляються через майбутні. Основи теорії антисипації були закладені в працях R. Rosen, P. Davidsson та ін. Сучасні здобутки в їх дослідженні належать як зарубіжним авторам D.M. Dubois, M.E. Burke, G. Tsirigotis, D. Bandekas, D. Pogaridis, J.L. Lázaro, L. Leydesdorff, A. Doniec, R. Mandiau, S. Piechowiak, S. Espie, так і вітчизняним – О.С. Макаренко, Д. Крушинський.

Зважаючи на той факт, що системи із антисипацією передбачають багатозначність у своїй формалізації, клас цих систем в значній мірі перетинається із диференціальними включеннями та функціонально-диференціальними рівняннями, що представляє собою добре вивчену область

математики, пік досліджень якої припадає на другу половину минулого століття. Основні вітчизняні здобутки розкриті в працях Мельника В.С., Капустяна О.В., Касьянова П.О., Пічкура В.В. та багатьох інших. Помітне уповільнення її вивчення обумовлене рядом об'єктивних причин: у значній мірі вони пов'язані із невизначеністю, а від так, передбачають множинність майбутніх сценаріїв розвитку та як наслідок – значний ріст обчислювальних витрат при чисельних дослідженнях; формалізована постановка задач часто некоректна в силу багатозначності розв'язків; та й просто відсутність належного математичного та програмного інструментарію. Класичними прикладами процесів, яким властива антисипативність, є моделювання рефлексивної поведінки людей, руху натовпу, транспортних потоків тощо.

У першому розділі роботи розглянуто сучасний стан теорії антисипативних систем, її проблематику, різні види антисипації, проведено критичний аналіз літератури. Наведено основні елементи теорії хаосу (необхідні для подальших викладок в роботі) та приклади реального застосування таких систем. Приводиться зведення цих систем із випередженням до систем із запізненням через многозначні оператори в загальному випадку. Наведено зв'язок дискретних антисипативних систем із різницеvими включеннями та функціонально-диференціальними рівняннями із випереджаючим аргументом. На прикладі логістичного рівняння наводиться нова модель із антисипацією із додаванням квадратичної антисипативної складової та проводиться загальний її аналіз в просторі параметрів. Встановлено області періодичної поведінки відповідної динамічної системи із запізненням з оператором еволюції, заданим багатозначним оператором. Результати представлені у вигляді діаграм Ламерея та скейлінгу. Сформульовано та доведено достатню умову виникнення самоподібних структур в цих множинах для випадку, коли антисипаційна система зводиться до динамічної системи із оператором Хатчинсона двох селекторів. Сформульована загальна постановка дисертації.

У другому розділі проводиться аналіз динамічних систем із багатозначним оператором еволюції з точки зору фрактальних властивостей їх граничних множин. Наведено необхідні елементи теорії символічної динаміки та систем ітерованих функцій (СІФ). Приводиться обґрунтування використання СІФ із самоперетинами для дослідження СА. В результаті дослідження фрактальних властивостей атракторів нелінійних дискретних систем із антисипацією, використовуючи апарат теорії символічної динаміки та СІФ, отримано співвідношення для оцінки їх Хаусдорфової розмірності зверху, коли нелінійні селектори оператора Хатчинсона відповідної динамічної системи не перетинаються та із самоперетинами частинного випадку. Розглянутий частинний випадок самоперетинаючихся нелінійних селекторів не відноситься до класу так званих СІФ із перетинами скінченного типу. Для нього показано єдиність розв'язку відповідного співвідношення та отримано необхідну умову його існування.

У третьому розділі наведено необхідні базові поняття теорії алгоритмів та складності обчислень. Детально описано узагальнення наступних методів на клас систем із сильною антисипацією у Хаусдорфовому метричному просторі: побудови карт динамічних режимів та старшого показника Ляпунова. Розвинення цих методів супроводжується скороченням часових обчислювальних витрат. Запропоновано представлення станів СА мультимножинами та доведена його доцільність з точки зору мінімізації часових обчислювальних витрат.

Для нелінійних дискретних антисипаційних систем, зведених до динамічних систем із оператором Хатчинсона, представлено та доведено часові та просторові обчислювальні складності: побудови станів; траєкторій; відстані між станами для пошуку періодів циклічних траєкторій; адаптованих процедур пошуку періодів циклічних траєкторій.

Проведено порівняння запропонованих процедур пошуку періодів циклічних траєкторій з точки зору обчислювальних витрат та наведені рекомендації щодо доцільності використання тієї чи іншої процедури у

фазових просторах різної структури (розподілу областей періодичних режимів). Перша процедура представляє собою узагальнення на Хаусдорфовий простір класичної процедури пошуку періоду циклічної процедури у зворотному напрямку. Виділені складові в цій процедурі, що мають найбільші обчислювальні витрати. З метою їх мінімізації запропоновано другу процедуру – ітерування серіями, яка скорочує час пошуку періоду на порядок.

Четвертий розділ присвячено питанням розробки програмних засобів аналізу, моделювання СА та візуалізації результатів на базі багатопоточної кластерної обчислювальної архітектури. В ході вирішення цих задач використовувався метод комп'ютерного моделювання. Представлено архітектуру узагальненої схеми побудови карт абстрактних показників на основі принципу розпаралелювання обчислень на багатовузловій обчислювальній архітектурі. На основі даної схеми реалізуються узагальнені методи, що детально описані у третьому розділі – метод побудови карт динамічних режимів, старшого показника Ляпунова та окремо наведені карти фрактальної та інформаційної розмірностей станів СА. Розглядається задача розробки програмних засобів дослідження нелінійної дискретної СА. Наведені чисельні результати переходу між різними режимами функціонування СА.

На основі узагальнених методів було побудовано відповідні карти за допомогою розробленого багатопоточного програмного забезпечення на кластерній обчислювальній архітектурі СКІТ. При цьому використовувалась дискретна система із сильною антисипацією першого порядку (із квадратичною антисипативною складовою). Вид такої системи вибраний з наступних міркувань. Як добре відомо, класичне логістичне рівняння має багату динаміку в силу нелінійності (області регулярної та хаотичної динаміки) із добре вивченими сценаріями переходу між ними. Із додаванням, відповідно, нелінійної антисипативної складової відносно нескладно з чисельної точки зору проводити дослідження переходу від класичного

логістичного рівняння до такого, яке починає враховувати складову випередження, тим самим визначаючи нові моделі та результати їх дослідження.

Розроблено пакет багатопоточного програмного забезпечення, за допомогою якого проведено дослідження. Всі обчислювальні експерименти проводилися на розподілених кластерних ресурсах інституту кібернетики ім. Глушкова та Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського».

Результати досліджень можуть бути застосовані при системному аналізі моделей процесів та явищ, котрі передбачають наявність випереджаючої складової. Моделювання таких об'єктів потребує значних обчислювальних витрат. Тому, узагальнені методи та розроблені засоби значно спростять подальший аналіз таких систем.

Ключові слова: системи із випередженням, динамічна система, хаотична динаміка, фрактальна розмірність, показники Ляпунова, оператор Хатчинсона, багатозначні оператори, символічна динаміка, обчислювальна складність.

ABSTRACT

Lazarenko S.V. Methods of analyzing of nonlinear discrete anticipatory systems. – Manuscript.

The thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the specialty 01.05.04 – Systems Analysis and Theory of Optimal Solutions. – National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kiev, 2019.

The work was prepared in Educational-scientific complex “Institute of Applied Systems Analysis” of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”.

The thesis is devoted to the generalization of mathematical and the development of software tools for analysis of discrete nonlinear systems with

anticipations.

Despite the fact that the number of works dedicated to research of the advanced systems is very small, the references to them are found quite a long time ago - even in L.E. Elsgoltsa's and S.B. Norkin's works. The newest results of the research of the advanced equations are M.V. Azbeliev, L.A. Beklaryan, D.A. Korotkiy, V.G. Pimeno, J. Yan. To date, a group of so-called the Anticipatory Systems (AS) occupies a significant place in the system of the advanced systems. The fundamental complexity of such systems follows directly from their main properties: current states are presented through the future ones. The basics of the Anticipatory theory were laid down in the writings of R. Rosen, P. Davidsson, etc. The current achievements in their study are both foreign authors D.M. Dubois, M.E. Burke, G. Tsirigotis, D. Bandek, D. Pogaridis, J.L. Lázaro, L. Leydesdorff, A. Doniec, R. Mandiau, S. Piechowiak, S. Espie, and the domestic - O.S. Makarenko, D. Krushinskiy.

Due to the fact that Anticipatory Systems assume ambiguity in their formalization, the class of these systems intersects to a considerable extent with differential inclusions and functional-differential equations, which is a well-studied field of mathematics, the peak of research of which falls in the second half of the last century. The main domestic achievements are revealed in the works of Melnik V.S., Kapustyan V.A, Kasyanov P.A, Pichkur V.V. and many others. The slowing down its study is due to a number of objective reasons: they are largely related to uncertainty, and thus, are supposed to have the plurality of evolution scenarios, and as a consequence - a significant increase in computing costs in numerical studies; formalized problem is usually ill-posed due to the multiplicity of the solutions; and just lack of proper mathematical software tools. The classic examples of processes that have anticipatory constituent are the modeling of reflective behavior of people, the movement of the crowd, traffic flows, and others like that.

In the first section of the thesis the present state of the theory of Anticipatory Systems, its problems, and various types of the anticipation are considered, carried out the critical analysis of the literature. The main elements of the theory of chaos

(necessary for further descriptions in the work) and examples of the real application of such systems are presented. The reduction of these systems is presented by delayed systems with multivalued evolution operators. The relation of discrete anticipatory systems with differential inclusions and advanced functional-differential equations is presented. In the example of the logistic equation, a new model with anticipation with the addition of a quadratic anticipatory component is presented and a general analysis is carried out in the parameter space. The region of periodic behavior of the corresponding dynamic system with delay with the evolution operator given by a multivalued operator is established. The results are presented in the form of Lamerey charts and scaling. A sufficient condition for the appearance of self-similar structures in these sets is formulated and proved for the case when the anticipatory system is reduced to a dynamical system with a Hutchinson operator with two selectors. The general statement of the thesis is formulated.

In the second section the dynamical systems with a multivalued evolution operator is analyzed in terms of the fractal properties of their final sets. The necessary elements of the theory of symbolic dynamics and systems of iterated functions (IFS) are given. The justification of the use of IFS with self-intersections for the study of the Anticipatory Systems is given. As a result of the study of fractal properties of attractors of nonlinear discrete systems with anticipation, using the tools of the theory of symbolic dynamics and IFS, it was the equations with the top estimation of Hausdorff dimensions when the nonlinear selectors of the Hutchinson operator of the corresponding dynamic system do not intersect and for the case with particular the self-intersections. The considered partial case of self-inverting selectors does not belong to a class of so-called IFS with finite-type intersections. The uniqueness of the solution and the necessary condition for its existence of the corresponding equation with self-intersections are provided.

The third section provides the necessary basic concepts of the theory of algorithms and computational complexities. The generalization of the following methods to the class of systems with a strong anticipation in the Hausdorff metric

space is described in detail: the construction of the Atlases of dynamical regimens and the Maps of The Maximal Lyapunov Exponent. The generalization of these methods is accompanied by a reduction of time complexity. The representation of the states of the AS by multi-sets is proposed and its expediency is proved in terms of minimization of time complexity.

For nonlinear discrete Anticipatory Systems, reduced to dynamical systems with the Hutchinson operator, the time and space computational complexities for followings are presented and proved: the construction of states; trajectory; distance between states for finding periods of cyclic trajectories; adapted procedures for finding periods of cyclic trajectories.

A comparison of the proposed procedures for the search for periods of cyclic trajectories from the point of view of computational complexity has been made and recommendations have been given as to the expediency of using one or another procedure in phase spaces of different structures (the distribution of periodic regimes regions). The first procedure is a generalization of the classical procedure in the Hausdorff space for finding the period of the cyclic procedure in the backward direction. Found the most time consuming parts of this procedure. In order to minimize them, the second procedure is carried out in series of iterations, which shortens the search time by an order of magnitude.

The fourth section is devoted to the development of software analysis, simulation of Anticipatory Systems and visualization of the results based on multithreaded cluster computing architecture. The computer modeling was used for solving these tasks. The architecture of the schema for construction of abstract cards is presented based on the principle of parallelization of computations on a multi-node architecture. On the basis of this scheme, it was implemented the generalized methods which were described in detail in the third section (the method of constructing of the Atlases of dynamic regimens, the Maximal Lyapunov exponent, and separately maps of fractal and informational dimensions of states of Anticipatory Systems). The task of developing software tools for the study of nonlinear discrete Anticipatory System is considered. The numerical

results of the transition between different operating modes of the Anticipatory System are given.

Based on the generalized methods, corresponding maps were constructed using the developed multithreaded software on the cluster computer architecture of SCIT. In this case, a discrete system with a strong anticipation of the first order (with a quadratic anticipatory component) was used. The type of such a system is chosen for the following reasons. As is well known, the classical logistics equation has a rich dynamics due to the nonlinearity (the region of regular and chaotic dynamics) with well-studied transition scenarios between them. With the addition, respectively, of a nonlinear anticipatory component, it is relatively simple from a numerical point of view to conduct a study of the transition from the classical logistic equation to one that begins to take into account the component of the advance, thereby defining new models and the results of their research.

Corresponding multithread software has been developed, the help of which the research has been conducted with. All computational experiments were conducted on distributed cluster resources of the Glushkov Institute of Cybernetics (SCIT) and the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”.

The results of research can be applied to the construction of new models of processes that imply the existence of the advance component. Modeling of such objects requires significant computational costs. Therefore, the developed and proposed approaches will greatly simplify the analysis of such systems.

Keywords: time-advance systems, dynamic system, chaotic dynamics, fractal dimension, Lyapunov exponents, Hutchinson operator, multi-valued maps, symbolic dynamics, computation complexity.

Список публікацій здобувача

1. Lazarenko S.V., Makarenko A.S.: Computational Complexities of Modeling of Dynamical Systems with Anticipation. *Journal of Automation and Information Sciences*. **51**(4), 55–65 (2019). doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.50. (Іноземне видання, реферується в SCOPUS).
2. Лазаренко, С. В.: До питання обчислювальної складності при дослідженні динаміки систем із антисипацією. *Математичні машини і системи*. **1**, 28–35 (2019). (Фахове видання, включено до бази РИНЦ eLIBRARY.ru)
3. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Аналіз логістичного антисипаційного рівняння із сильною антисипацією. *Наукові вісті НТУУ “КПІ”*. **4**, 91–96 (2012). (Фахове видання).
4. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Класифікація операторів однієї дискретної антисипаційної системи першого порядку. *Системні дослідження та інформаційні технології*. **1**, 97–106 (2013). (Фахове видання).
5. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Багатопоточні комп’ютерні обчислення у дослідженні нелінійних динамічних систем. *Проблеми програмування*. **3**, 109–116 (2013). (Фахове видання).
6. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Про оцінки розмірностей атракторів дискретних динамічних систем із антисипацією. *Математичні машини і системи*. **4**, 161–168 (2013). (Фахове видання).
7. Lazarenko, S., Makarenko, A.: Investigation of Complex Multivalued Solutions in Discrete Dynamical Systems with Anticipation. International Conference on Computing Anticipatory Systems: CASYS’11, August 8–13 2011.

8. Makarenko, A., Lazarenko, S.: About a few weak anticipatory systems. The 12th Conference Mathematics in Technical and Natural Sciences. Krynica, September 4–10 2011
9. Lazarenko, S.: Cluster computing for some nonlinear multiple-value mapping. 2nd International conference on Nonlinear analysis and applications / on memory of V.S. Melnik, April 4–6 2012, p. 62.
- 10.Лазаренко, С.В.: Моделювання сильних антисипаційних систем за допомогою кластерних обчислень. Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування». 16–18 травня 2012. с.20.
- 11.Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Математическое моделирование систем с сильной антисипацией. Международная научно-методическая конференция «Информационно-вычислительные технологии и моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования», ПГУАС. Пенза. 9–14 декабря 2013
- 12.Лазаренко, С. В., Макаренко, О.С.: Особливості математичного моделювання систем із антисипацією та проблеми, що постають в ході нього. Аналіз, моделювання, управління. Вип. 1. Збірник наукових праць відділу прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ». Київ, 2013. с. 177.
- 13.Лазаренко, С.В.: До обчислювальних проблем антисипаційних систем. Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Київ, 27–28 грудня 2018.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	16
ВСТУП	17
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПРОБЛЕМАТИКА	
ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ	24
1.1 Основні поняття теорії антисипації	28
1.1.1 Представлення антисипаційних систем за Робертом Розеном ..	28
1.1.2 Представлення поняття антисипації за Д. Дюбуа	29
1.1.3 Основні види антисипаційних систем	29
1.2 Поняття хаосу у динамічних системах	32
1.3 Формалізація ДС із антисипацією через багатозначні відображення	33
1.4 Зв'язок антисипативних рівнянь із диференціальними включеннями та функціонально-диференціальними рівняннями	36
1.5 Загальний аналіз логістичного рівняння із антисипацією	39
1.6 Класифікація операторів однієї дискретної антисипаційної системи першого порядку	44
1.6.1 Класифікація оператора для квадратичної АС першого порядку	45
1.6.2 Виникнення самоподібних структур	48
1.7 Постановка задачі	51
Висновки до розділу	51
РОЗДІЛ 2. РОЗМІРНОСТІ АТРАКТОРІВ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ	
2.1 Основні поняття теорій систем ітерованих функцій та символьної динаміки	57
2.2 Розрахунок фрактальних розмірностей граничних множин СІФ. Метод Ngai-Wang	63

2.3 Оцінка розмірності Хаусдорфа для атрактора ДСА без самоперетинів	65
2.4 Оцінка розмірності Хаусдорфа для атракторів ДСА із самоперетинами частинного випадку	67
Висновки до розділу	76
РОЗДІЛ 3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СКЛАДНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ	77
3.1 Математична модель	77
3.2 Теорія алгоритмів та обчислювальні моделі	77
3.3 Теорія складності обчислень	79
3.4 Побудова карт показників ДС	81
3.4.1 Складність побудови стану ДСА	82
3.4.2 Складність розрахунку метрики Хаусдорфа	84
3.4.3 Складність побудови траєкторії ДСА	85
3.4.4 Адаптація процедури побудови карт динамічних режимів для ДСА. Її обчислювальні складності	86
3.4.4.1 Процедура А пошуку циклічної траєкторії. Її обчислювальні складності	88
3.4.4.2 Процедура В пошуку циклічної траєкторії. Її обчислювальні складності	91
3.4.4.3 Порівняння обчислювальних складностей процедур пошуку циклічних траєкторій	96
3.5 Розрахунок показників Ляпунова	98
3.5.1 Адаптація процедури розрахунку старшого показника Ляпунова для ДС із антисипацією	100
3.5.2 Обчислювальні складності процедури розрахунку старшого ПЛ	103
Висновки до розділу	104
РОЗДІЛ 4. КОМП'ЮТЕРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ	106

4.1 Архітектура побудови карт абстрактних показників на основі СКІТ	110
4.2 Приклади розв'язання задач для ДСА	112
4.2.1 Приклад побудови карт динамічних режимів ДСА	112
4.2.2 Приклад побудови карти старшого показника Ляпунова для ДСА	115
4.2.3 Побудова карт узагальнених розмірностей Рені для ДСА	117
4.3 Результати чисельного моделювання переходу між різними режимами ДСА	123
Висновки до розділу	125
ВИСНОВКИ	126
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	128
ДОДАТОК А. Список публікацій здобувача за темою дисертації	142
ДОДАТОК Б. Довідка про впровадження результатів у навчальний процес	144

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АС (або СА) – антисипаційна система (або система із антисипацією)

ДС – динамічна система

ДСА – динамічна система із антисипацією

ПЛ (СПЛ) – показник Ляпунова (старший показник Ляпунова)

СІФ – система ітерованих функцій

СКІТ – суперкомп'ютер для інформаційних технологій

\emptyset – пуста множина

$\|\cdot\|$ – евклідова норма

\square – кінець доведення теореми

$\lceil \cdot \rceil$ – округлення числа до найближчого цілого в більшу сторону

$\lfloor \cdot \rfloor$ – округлення числа до найближчого цілого в меншу сторону

ВСТУП

Бурхливий розвиток технічних засобів, технологій та відповідного математичного інструментарію останні десятиліття дає підстави для розв'язання задач, пов'язаних із дослідженням складних процесів та явищ, протікання яких залежить не лише від передісторії, а й від майбутнього. Всі вони у значній мірі пов'язані із невизначеністю, а від так, передбачають множинність майбутніх сценаріїв розвитку. Ще до недавніх пір вони здавалися надскладним для вирішення із-за ряду об'єктивних причин: для них не було апарату досліджень; часто самі постановки формалізованих задач були некоректними; відсутність технічних засобів, котрі моделювали б процеси із множинними альтернативними сценаріями розвитку, що представляє собою дуже ресурсномістку задачу. До них можна віднести: моделювання поведінки людей (вирішення конфліктних ситуацій), прогнозування суспільно-економічних та біологічних процесів, моделювання транспортного потоку тощо. Розробка інструментарію для аналізу та прогнозування цих процесів є одним із сучасних напрямків системних досліджень в інформатиці та кібернетиці.

Не зважаючи на те, що робіт в області дослідження систем із випередженням дуже мало, згадки про них зустрічаються досить давно – ще в працях Л.Е. Ельсгольца та С.Б. Норкіна. Новітні результати досліджень рівнянь із випередженням та чисельним алгоритмам їх розв'язань належать М.В. Азбелєву, Л.А. Бекларян, Д.А. Короткому, В.Г. Піменову, J. Yan.

На сьогоднішній день в класі систем із випередженням значне місце займає група так званих антисипаційних систем (СА). Її основи були закладені в працях R. Rosen, P. Davidsson та ін. Стани цих систем залежать від зпрогнозованих майбутніх станів (модельних). Їх ще називають системами із слабкою антисипацією. На відміну від них, було введено поняття сильної антисипаційної системи, в якій модель співпадає із самою системою. Основні здобутки в їх дослідженні належать як зарубіжним

авторам D.M. Dubois, M.E. Burke, G. Tsirigotis, D. Bandekas, D. Pogaridis, J.L. Lázaro, L. Leydesdorff, A. Doniec, R. Mandiau, S. Piechowiak, S. Espie, так і вітчизняним – О.С. Макаренко, Д. Крушинський. Порівняно із закордонними роботами, у вітчизняних цей напрям досліджень АС ще не набув такого поширення.

Зважаючи на той факт, що системи із випередженням передбачають багатозначність у своїй формалізації, їх дослідження йде паралельно із теорією багатозначних відображень, класичні здобутки якої належать Ю.Г. Борисовичу, Б.Д. Гельдману, Б.М. Пшеничному та ін. Незважаючи на той факт, що рівняння із антисипацією є підкласом диференціальних включень та функціонально-диференціальних рівнянь, для яких розроблено потужний теоретичний інструментарій, включаючи результати по узагальненню теорії глобальних та траєкторних атракторів при багатозначності розв'язків, існуванню цих розв'язків та дослідженню стійкості тощо (В.С. Мельник, О.В. Капустян, П.О. Касьянов, В.В. Пічкур та ін.) – все ще залишається відкритим ряд прикладних задач побудови інструментарію дослідження динаміки таких систем, зокрема – при переході між різними режимами із оцінками та мінімізацією відповідних обчислювальних витрат.

З практичної точки зору, такий напрям динамічних систем, як хаотична динаміка, представляє великий інтерес у техніці при проектування конструкцій, моделюванні різноманітних соціально-економічних процесів тощо. Основний внесок у дослідження одного із принципів показників поведінки динамічних систем належить Ляпунову О.М., опираючись на здобутки котрого, розбудовано апарат опису поведінки динамічних систем однойменними показниками. За допомогою останніх зручно визначати чи властива даній системі хаотичність. Дослідженню цьому, без перебільшень, надважливого напрямку присвячено ряд робіт Д. Каплана, Д. Йорка, С. Смейла, М. Фейгенбаума, С.П. Кузнецова та інших. Їх роботи стали свого роду класикою даної області.

Із виникненням таких систем, постає потреба в розвитку апарату для їх системного аналізу, а важливість цього класу систем та його недостатня вивченість й обумовлюють актуальність теми дослідження. Окрім невеликої кількості робіт, присвячених як теоретичним, так і прикладним здобуткам в теорії антисипації, ще й не існує системного підходу в їх дослідженні та відсутнє належне математичне та програмне забезпечення для їх системного аналізу. До того ж, їх симуляція представляє собою надресурсномістку проблему, а від того, гостро постає задача оптимізації цих алгоритмів. Беручи до уваги все вище зазначене, дану роботу присвячено розвиненню математичних методів та розробці програмних засобів для дослідження систем із сильною антисипацією наряду із обчислювальною оптимізацією запропонованих алгоритмів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертація виконана у відділі прикладного нелінійного аналізу Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» в рамках таких наукових тем: «Системи, моделі та рівняння з випередженням та запізненням. Дослідження математичних задач та застосувань» – номер державної реєстрації 0114U000205; «Дослідження складних режимів багатозначних відображень в моделях з випередженням та недостатньою інформацією» – номер державної реєстрації 0109U000297.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертації є розвинення математичних та розробка програмних засобів аналізу дискретно-часових нелінійних систем із антисипацією із скороченням обчислювальних витрат. Для досягнення поставленої мети розв'язуються наступні задачі:

- дослідити простір параметрів нелінійної дискретної системи із антисипацією;
- дослідити граничні множини нелінійної дискретної системи із антисипацією на предмет фрактальних властивостей (самоподібності, Хаусдорфової розмірності);

- встановити обчислювальні складності моделювання систем із антисипацією;
- узагальнити методи побудови карт динамічних режимів, старшого показника Ляпунова для застосування їх у дослідженні антисипативних систем;
- розробити програмне забезпечення для застосування та візуалізації узагальнених методів.

Об'єктом дослідження є нелінійні, дискретно-часові, антисипативні процеси різної природи.

Предметом дослідження є моделі і методи аналізу нелінійних дискретно-часових систем із антисипацією, і програмні засоби їх реалізації.

Методи дослідження. Для дослідження фрактальних властивостей атракторів динамічних систем із антисипацією (ДСА) та отримання оціночних співвідношень для їх розмірності Хаусдорфа зверху використано методи теорій символної динаміки, фрактального аналізу та ітерованих функцій. Узагальнення класичних методах аналізу динамічних систем на клас систем із антисипацією, здійснювалось із використанням теорії багатозначних операторів у Хаусдорфовому просторі. Оптимізація розвинених методів здійснювалась за допомогою засобів теорії складності обчислень. Обчислювальні розрахунки проводилися на розподілених кластерних системах, а візуалізація атракторів ДСА реалізовувалася методом комп'ютерного моделювання.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

вперше для антисипаційних систем, що зводяться до співвідношення майбутніх станів від минулих через оператор Хатчинсона:

- для оціночного співвідношення Хаусдорфової розмірності їх атракторів зверху, коли селектори оператора Хатчинсона перетинаються у частинному випадку:
 - сформульовано необхідну умову існування розв'язку;
 - показано єдиність розв'язку;

- отримані часові та просторові обчислювальні складності моделювання;

отримали подальший розвиток:

- за допомогою символної динаміки отримано оціночні співвідношення Хаусдорфової розмірності зверху для атракторів ДСА у випадку, коли селектори оператора Хатчинсона не перетинаються та із самоперетинами частинного випадку;
- метод побудови карт динамічних режимів: узагальнено на динамічні системи із багатозначним оператором еволюції; поняття циклу представлено в Хаусдорфовому метричному просторі; скорочено часові обчислювальні витрати за рахунок представлення станів ДСА мультимножинами та пошуку циклу серіями ітерувань;
- метод побудови карти старшого показника Ляпунова: узагальнено на динамічні системи із багатозначним оператором еволюції в Хаусдорфовому метричному просторі; скорочено часові обчислювальні витрати за рахунок представлення станів ДСА мультимножинами;

Наукове та практичне значення отриманих результатів. Проведені дослідження відносяться до теоретичних та прикладних проблем системного аналізу дискретно-часових нелінійних систем із антисипацією. Результати досліджень можна застосовувати в системному аналізі моделей процесів та явищ, формалізація яких передбачає наявність випереджаючої складової. До них можна віднести моделі співіснування видів, моделі конфліктних ситуацій боротьби за обмежені ресурси та нові моделі нейронних мереж, клітинних автоматів та штучних імунних систем із випередженням.

Основні теоретичні та обчислювальні результати впроваджено у навчальний процес ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського» (Додаток Б).

Особистий внесок здобувача. Всі результати, одержані в дисертації та зокрема ті, що виносяться на захист, отримані автором самостійно.

Особистий внесок у роботах, виконаних у співавторстві: [1; 3-6] додатку А здобувачу належать всі основні результати робіт, співавтору О.С. Макаренку – постановка задач та керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи були представлені на наступних конференціях та семінарах:

- 1) International Conference on Computing Anticipatory Systems: CASYS'11, Belgium, August 8–13, 2011;
- 2) The 12th Conference Mathematics in Technical and Natural Sciences, Krynica, September 4–10, 2011;
- 3) 2nd International conference on Nonlinear analysis and applications / on memory of V.S. Melnik, Kiev, April 4–6, 2012;
- 4) Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування». Київ, 16-18 травня, 2012;
- 5) Международная научно-методическая конференция «Информационно-вычислительные технологии и моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования», ПГУАС. – Пенза. 9–14 декабря 2013;
- 6) Аналіз, моделювання, управління. Вип. 1. Збірник наукових праць відділу прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ». Київ, 2013. С. 177;
- 7) Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Київ. 27–28 грудня 2018.

Результати роботи неодноразово докладалися на наукових семінарах відділу прикладного нелінійного аналізу ННК «ІПСА».

Публікації. За матеріалами дисертаційної роботи опубліковано 13 наукових праць, у тому числі 5 статей у наукових фахових виданнях України (одна з них включена до науково-метричної бази РІНЦ), 1 стаття у фаховому зарубіжному виданні, включеному до міжнародної науково-метричної бази SCOPUS, 7 тез доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

Структура та обсяг роботи. Робота складається із вступу, переліку умовних позначень, чотирьох розділів основної частини, висновків та списку використаних джерел і двох додатків – із списком публікацій автора за темою дисертаційної роботи та довідка про впровадження результатів у навчальний процес. Повний обсяг роботи – 144 сторінок із 18 рисунками, обсяг основного тексту складає 111 сторінок. Бібліографія містить 129 посилань на літературні джерела.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПРОБЛЕМАТИКА ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ

Даний розділ присвячений огляду, введенню термінології та опису проблематики дослідження досить нового класу систем – обчислювальних систем із антисипацією (СА) або – *антисипаційних систем* (АС), що є новим напрямком кібернетики та інформатики, котрий активно розвивається останні десятиліття. Широкий клас процесів, що протікають у соціально-економічному чи політичному житті людини так чи інакше можна формально виражати системами із випередженням (антисипацією), на противагу системам із запізненням. Це стосується, як моделювання поведінки натовпу, рефлексії, так і прийняття індивідуальних рішень при множинних альтернативних варіантах, у тому числі і у фінансово-економічній сфері (конфлікти за обмежені ресурси тощо). Включення випереджаючої складової у модель може точніше відображати досліджуваний об'єкт, формальним представленням якого вона виступає. Це інтуїтивно обумовлюється й тим фактом, що багато процесів та явищ, так чи інакше, враховуються деяким чином власне майбутнє. Беручи до уваги складність моделювання таких систем, актуальність їх дослідження постає особливо гостро. Таким чином, ця область аналізу систем має важливе значення у дослідженні складних соціально-економічних та політичних процесів.

На сьогоднішній день розробляється потужний прикладний апарат для дослідження зазначених процесів і явищ, у який входять клітинні автомати, різноманітні штучні біологічні системи (нейроні мережі та імунні системи) тощо. Однак переважна їх більшість базується так чи інакше на принципах «передісторії», тобто їх функціонування повністю визначається даними із минулого. Сучасним перспективним напрямком модифікування цих засобів можна вважати введення складових «самоадаптування» на основі принципів випередження. Тобто побудову нових моделей із антисипаційними

складовими, що, очевидно, є більш реалістичним формальним представленням досліджуваних процесів чи явищ. Зрозуміло, що моделювання таких систем складніше та більш ресурсномістке, через що й обділене гідною увагою.

Початком розвитку цього напрямку обчислювальних систем вважають роботу американського біолога Роберта Розена «Anticipatory Systems» [7]. Розен відомий, зокрема, в математичній біології як засновник класу реляційних моделей живих організмів, що називають (M, R) – системами **М**етаболічних **Р**еплікацій (відновлення), котрі формально представляють послідовними автоматами. Він розглядав антисипацію як модель причинно-наслідкових зв'язків. Так, у своїй роботі Розен дає наступне означення антисипаційної системи, як такої, «що містить прогностну модель самої себе, та/чи оточуючого середовища, котра дозволяє системі змінювати стан в момент часу у відповідності із прогнозами цієї моделі, що належать до більш пізнього моменту часу». Він розглядає їх пов'язаними із граничною причиною по Аристотелю – майбутня причина могла б бути породжена дією теперішнього часу. Тоді, може здатися, що принцип причинності «перевертається». Насправді, принцип причинності тут витримано, його особливість для цих систем буде розглянута в роботі далі. Розен пов'язує деякі антисипаційні системи з циклами із зворотнім зв'язком.

Основні здобутки в області дослідження антисипаційних систем та застосування принципів антисипації у фізиці належать Д.М.Дюбуа, котрий розглядав її як частинний випадок динаміки систем [8-12]. Він опирається у моделюванні обчислювальних антисипаційних системах на поняття сильної антиципації на противагу слабкої антиципації, котра, як він стверджує, характеризує підхід Розена [8]. Також для дослідження АС вводить поняття гіперінкурсії та інкурсії [9]. Дюбуа запропонував ряд математичних моделей, збудованих із включенням антисипаційної складової, в тому числі: топологію нових нейронних мереж, побудову пам'яті як стеку гіперінкурсій тощо [10].

Праці фон Глазерсфелда та Ріглера [13; 14] розкривають конструювання когнітивних моделей на основі антисипації. Концепт теорії Розена в працях [15; 16] розглядається як предмет застосування при побудові альтернативного підходу квантових обчислень. Принцип превентивної антисипації знайшов своє застосування в задачах мультиагентної координації [17] завдяки А. Доніек та Р.Мандіао, із подальшим застосуванням для симуляції трафіку.

Вивчення автономних агентів як антисипаційних систем, були ініційовані Девідсоном [18], він описав ідею обчислювального фреймворку, задавши базову архітектуру автономного агента, що базується саме на слабкій антисипації в мультиагентній системі.

Значні теоретичні та прикладні здобутки у дослідженні таких обчислювальних систем належать Марку Бюрку [19-23]. В своїй роботі [20] він проводить дослідження динаміки деяких слабких антисипаційних систем, утворених із відповідних не антисипаційних системи першого порядку та порівнює їх поведінку із відповідними не антисипаційними та сильно антисипаційними системами. Побудовані антисипаційні системи першого порядку на унімодальних відображеннях. У роботі [21] зосереджується на сильних АС, в яких рекурсія першого порядку замінюється на інкурсією, пов'язану із такою АС (про них мова піде трохи далі у розділі). Досліджується вплив такої заміни на регулярну динаміку цієї системи (стійкість її непорушних точок різного періоду), отримані результати зміни стійкості і знаків мультиплікаторів при такій заміні. Набір статей [22; 23] присвячено дослідженню динаміки ряду соціальних моделей. Зокрема, у роботі [23] представляється інкурсія, що отримана для дискретно-часової моделі епідемії на основі моделі соціальної системи, що має різними по функціонуванню підсистемами. Тут отримані умови та темпи переходу системи в ізольовані положення чи положення рівноваги. В роботі [22] описується модель популяції із обмеженнями, що залежать від щільності. На

основі слабкої антисипації отримані області, при яких модель демонструє хаотичність (колапс популяції).

В сумісних працях Тсиріготіса, Бандекаса, Погарідіса та Лазаро [24] розглядаються антисипаційні аспекти в нейронно-мереженому управлінні. Зокрема, побудовані моделі нейронних мереж із прогнозним контролем на основі моделей NARMA (нелінійної АР із КС).

Роботи Л. Лейдесдорфа присвячено застосуванню теорії антисипації у прикладній соціології [25-29], зокрема, – в моделюванні функціонально-диференційованих підсистем соціальної системи Люмана, в яких розглядаються питання утворення і моделювання соціальних систем, створених із різних організаційних підсистем, що взаємодіють між собою як рефлексійні агенти. А вже на основі цієї взаємодії будується рекурсивний процес прийняття рішення, котрий використовується для управління цією соціальною системою.

Варто відзначити прикладні досягнення вітчизняних дослідників О.С. Макаренка та Д.А. Крушинського [30-39] у застосуванні антисипаційних принципів до побудови нових моделей клітинних автоматів та нейронним мережам із елементами прогнозування. Такі моделі передбачають наявність індивідуальних ментальних властивостей об'єктів моделювання.

Однак, динаміка сильних АС із багатозначним оператором еволюції все ще залишається малодослідженою областю таких обчислювальних систем. Принципам базового дослідження саме такого класу обчислювальних систем і присвяtimo даний розділ роботи. Йому передують наведення основних понять та означень в теорії антисипаційних систем. Розглядаємо складові системного підходу у дослідженні антисипаційних дискретно-часових систем на прикладі аналізу логістичної антисипаційної системи із сильною квадратичною антисипацією першого порядку. Зокрема виділимо області стійкості непорушних точок в просторі параметрів та сформулюємо достатню умову виникнення гіперінкурсії із зростаючою потужністю станів [1; 2; 40-42].

1.1 Основні поняття теорії антисипації

1.1.1 Представлення антисипаційних систем за Робертом Розеном

Розуміння антисипаційних систем за Розеном передбачає сумісне еволюціонування як *деякої динамічної системи* S , так і динамічної системи M , що являє собою *модель* системи S . Принцип полягає у тому, що модель розвивається «швидше» за S , тому, споглядаючи за станом системи M на деякому часовому кроці можна буде передбачити майбутні стани S у цьому часовому кроці [43]. Таким чином, наріжною для Розена стала задача побудови такої прогностної моделі. Її прикладом, якому властиве упередження, є модель метаболізму (M, R) . Суть моделі (M, R) зводилась до пояснення поведінки клітини незалежно від матеріальної субстанції, адаптуючи функціональні компоненти, як складові аналізу. Формалізація біологічного принципу метаболізму-реплікації Розеном зводилась до наступного. Модель складалася з двох частин: метаболічної (може бути представлена набором відображень входів із навколишнього середовища у виходи) та відновлюючої (підтримка метаболічної активності). Більш формально – метаболічна частина (M, R) моделі задається деяким відображенням $f : A \rightarrow B$. А множину усіх таких можливих відображень (трансформацій, що клітина може проявляти в ході метаболізму) із A в B позначають $H(A, B)$. У кожного процесу дублювання (копіювання) має бути своя область у $H(A, B)$. Частина (M, R) моделі $\varphi_f : B \rightarrow H(A, B)$, відповідальна за відновлення, відображає у цю множину. Таким чином, повну (M, R) модель можна представити як

$$\underbrace{A \xrightarrow{f} B}_{\text{метаболізм}} \xrightarrow{\varphi_f} \underbrace{H(A, B)}_{\text{відновлення}}$$

Розен показав, що частина β_b , котра відповідає за копіювання, вже може бути одержана із (M, R) моделі з двома вище описаними складовими, а саме

$\beta_b : H(A, B) \rightarrow H(B, H(A, B))$. Таким чином, властивість копіювання слідує за метаболізмом, а тоді – за відновленням, тобто із B слідує копіювання β_b

$$\underbrace{A \xrightarrow{f} B}_{\text{метаболізм}} \xrightarrow{\varphi_f} \underbrace{H(A, B)}_{\text{відновлення}} \xrightarrow{\beta_b} \underbrace{H(B, H(A, B))}_{\text{копіювання}},$$

що в кінці-кінців зробить «зворотну петлю». Що власне і описує «граничну ціль» за Розеном та принцип антисипації в математичній біології [43].

1.1.2 Представлення поняття антисипації за Д. Дюбуа

Дюбуа пропонує означення АС на прикладі системи скінченно-різницевого рівняння:

$$(S(t + \Delta t) - S(t)) / \Delta t = F(S(t), M(t + \Delta t))$$

$$(M(t + \Delta t) - M(t)) / \Delta t = F(S(t), M(t + \Delta t))$$

де стан системи S та її моделі M в майбутньому часі $t + \Delta t$ є функціями від стану системи S в теперішній час t та моделі M в наступний момент $t + \Delta t$.

У випадку, коли модель системи співпадає із самою системою $M = S$ Дюбуа вводить поняття *інкурсії*, як неявної рекурсії, тобто залежність майбутнього стану системи $S(t + \Delta t)$ не лише від теперішнього $S(t)$ та минулих $S(t - \Delta t)$, $S(t - 2\Delta t)$, ... , а від майбутніх $S(t + \Delta t)$, $S(t + 2\Delta t)$, Так, у випадку $M = S$ майбутній стан системи

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) &= S(t) + \Delta t \cdot F(S(t), S(t + \Delta t)) = \\ &= S(t) + \Delta t \cdot F(S(t), S(t) + \Delta t \cdot F(S(t), S(t + \Delta t))) = \dots \end{aligned}$$

описується нескінченною підстановкою правої частини замість $S(t + \Delta t)$ у ній [10].

1.1.3 Основні види антисипаційних систем

Введемо основні поняття АС. Дискретно-часові динамічні системи (інколи зустрічаємо причинні) описуються, як правило, рекурсійними

співвідношеннями, що задаються функціональним зв'язком між майбутніми (x_{t+1}), поточним (x_t) і минулими (x_{t-1}) станами системи і, так званими, управляючими параметрами (λ) з деякої множини Λ :

$$x_{t+1} = f(\dots, x_{t-1}, x_t, \lambda), \quad x_t \in X, \lambda \in \Lambda \quad t = 1, 2, \dots$$

Д. Дюбуа вводить поняття *інкурсійності*, як зазначалося вище, – неявної рекурсійної системи [10], що задається в загальному випадку співвідношенням

$$x_{t+1} = f(\dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots, \lambda)$$

З прикладами застосування інкурсійності до прикладних моделей можна ознайомитись, наприклад, у роботі [23]. Розрізняють дві основні групи АС – слабкі та сильні. *Слабкі* АС із дискретним часом використовують модель, що працює в так званому “fast forward” режимі (в прямому ході часу), створюючи прогнози станів (\hat{x}_{t+1}) динамічної системи в наступні моменти часу. А тоді, використовуючи ці прогнозні значення, в свою чергу, будуються майбутні стани системи у режимі реального часу. Тобто таку систему можна формально представити, як

$$x_{t+1} = f(\dots, x_{t-1}, x_t, \hat{x}_{t+1}, \dots, \lambda)$$

де \hat{x}_{t+1} – зпрогнозований моделлю стан системи в момент часу $t + 1$. Модель антисипації за Робертом Розеном представляє собою, як раз, слабку антисипацію. *Сильна* ж АС при визначенні майбутнього стану системи не використовує вбудовану модель для побудови прогнозних майбутніх значень, а є, скоріше, системою, що будується на основі самої себе («посилається сама на себе»), тобто систем із зворотнім зв'язком. Інакше кажучи, коли модель системи співпадає із самою системою, маємо справу із саме сильною антисипацією. Поняття антисипації за Д. Дюбуа є сильною антисипацією. В загальному випадку сильні АС задаються співвідношенням

$$x_{t+1} = f(x_{t-a_1}, \dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+a_2}, \lambda)$$

де x_{t+i} – майбутні стани системи при $i = 1, 2, \dots, a_2$, a_2 – порядок антисипації, x_t – поточний стан і x_{t-i} , $i = 1, 2, \dots, a_1$ – минулі стани системи з управляючими параметрами, $t \in Z$ – дискретний час, оператор зв'язку $f : \underbrace{R^n \times \dots \times R^n}_{a_1 + a_2 + 1} \times R^{\dim(\lambda)} \rightarrow R^n$.

Залежно від того, допускає функціональний зв'язок f однозначні чи багатозначні розв'язки, вирізняють особливий клас інкурсивних АС – гіперінкурсивні АС, функція f яких допускає багатозначність відображення [10].

До прикладу таких систем можна навести рекурсивне відображення П'єр Ферхюльста, котре, як добре відомо, володіє властивостями хаосу та біфуркацій:

$$x(t+1) = 4\lambda \cdot x(t)(1 - x(t)), \quad x(t) \in R, \lambda \in R.$$

Стійку систему при всіх λ можна отримати із сильної антисипаційної моделі, котра «посилається сама на себе»:

$$x(t+1) = 4\lambda \cdot x(t)(1 - x(t+1))$$

Така модель системи розглядається, зокрема, у роботі Дюбуа [10]. Система, що описується такою моделлю (рівність Михаеліс-Ментен-Монода) не проявляє хаос. Монод показав, що така модель формалізує процес росту популяції бактерій, на відміну від рівності Пера-Ферхюльста [12].

Приклад дискретних динамічних системи із антисипаційною складовою

На сьогоднішній день існує велика кількість ДС, для яких доведена наявність хаотичності в їх динаміці. Так, до прикладу, модель зміни чисельності популяції живих організмів, що оцінює свою власну чисельність по

відношенню до майбутнього стану навколишнього середовища, в якому і розвивається ця популяція, можна представити як

$$P(t) = f(P(t-1), \hat{P}(t), E(t)),$$

де $P(t)$ – чисельність популяції в момент t , $\hat{P}(t)$ – оцінка (прогноз) стану чисельності в момент t , $E(t)$ – стан навколишнього середовища в момент t . Такого роду системи називають антисипаційними із *слабкою* антисипацією.

1.2 Поняття хаосу у динамічних системах

Функціонування динамічних систем допускає достатньо різноманітний набір типів сценаріїв із різною поведінкою: регулярною, квазіперіодичною, хаотичною тощо. Останній режим ДС – відкритий та описаний порівняно недавно. Трапляється, що його зіставляють із випадковим режимом функціонування, однак, це принципово інша динаміка. На відміну від хаотичної динаміки, випадкові процеси визначаються як не детерміновані. Так, під хаосом часто розуміють термін детермінованого хаосу, тобто такого, котрий виникає в ДС із визначеним оператором еволюції.

На сьогодні існує цілий ряд означень хаосу, починаючи з теоретичних означень міри для випадковості в теорії ергодичності і аж до топологічного підходу [44; 45, с.48-53]. При визначенні поняття хаосу керуються, як правило, такими основними властивостями ДС, як-от сильна (експоненціальна) чутливість до початкових умов чи зовнішнього впливу, транзитивність та щільність циклів у фазовому просторі. Однак, як відомо, одної інтуїтивної умови чутливості до початкових даних для виникнення хаосу не достатньо. Наведемо їх означення.

Означення. Розглянемо деяке відображення метричного простору M у саме себе $f : M \rightarrow M$. Кажуть, що f – топологічно транзитивне, якщо для будь-якої пари відкритих множин $U, V \subset M$ існує такий номер n , що $f^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Тобто точки з будь-якого околу з часом перейдуть в будь-яку іншу множину. Саме означення чутливості до початкових умов є наступним.

Означення. Відображення $f : M \rightarrow M$ метричного простору саме у себе є чутливим до початкових умов, якщо існує $\delta > 0$ для $\forall x \in M$ та будь-якого U околу x існують $y \in U$ і такий номер n , що $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Іншими словами, знайдеться (що найменше одна) така точка, довільно близька до x , котра з часом відхилиться, щонайменше на δ під ітеруванням f . Особливо це стосується чисельного моделювання, що неминуче супроводжується помилками округлення тощо. В ході чого обчислювана траєкторія може не мати нічого спільного із траєкторією реального об'єкта.

Щільність циклів усіх періодів означає наступне. Яку б ми не взяли точку метричного простору M будь-якого околу, в ньому знайдеться щонайменше одна періодична траєкторія. В роботі [46] було доведено, що для неперервного відображення $f : M \rightarrow M$, що діє у метричному просторі M , для якого виконуються умови транзитивності та щільності періодичних точок, для нього буде й виконуватись умова чутливості до початкових умов.

Для систем, котрі описуються гіперінкурсивними антисипаційними рівняннями, поняття динамічних режимів: хаотичності, регулярності, квазіперіодичності тощо; вимагають визначення, адаптації існуючих класичних чи розробку нових інструментів дослідження. Теорія антисипативних рівнянь – новий напрям теорії динамічних систем.

1.3 Формалізація ДС із антиципацією через багатозначні відображення

Як зазначалося в попередніх підрозділах, існують антисипаційні ДС із гіперінкурсією – такою інкурсією, в якій функціональний зв'язок передбачає багатозначність розв'язків. Або, якщо рівняння інкурсії можна звести до виду явної залежності майбутнього стану від попередніх, то оператор такої ДС виступає багатозначним відображення. Розглядатимемо початкову систему, що описується законом сильної антисипації першого порядку

$$x_i = f(x_{i-1}, x_i, \Lambda), \quad x_i \in R^n, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

де, так званий, управляючий параметр $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\dim(\Lambda)}), \lambda_j \in R^n, j = 1, \dim(\Lambda)$, оператор зв'язку $f : R^n \times R^n \times R^{n \cdot \dim(\Lambda)} \rightarrow R^n$ (часто — однозначний), $x_i \in R^n$ — стани системи, заданої неявною залежністю майбутнього від минулого.

Нас цікавить випадок, коли f передбачає багатозначність розв'язків. Виходячи з цих міркувань, вводимо наступні означення, якими послуговуватимемося у всій подальшій роботі. Всі ці поняття базуються на основних означеннях теорії багатозначного аналізу [47; 48]. Нехай оператор f з (1.1) передбачає багатозначність розв'язків і його можна представити багатозначним відображенням $F : S^n \times R^{n \cdot \dim(\Lambda)} \rightarrow S^n$ у вигляді

$$X_i = F(X_{i-1}, \Lambda) = \bigcup_{x \in X_{i-1}} \bigcup_k f_k(x, \Lambda), \quad i = 1, 2, \dots, \quad \forall k \quad (1.2)$$

тут $X_i \in S^n, x \in R^n, f_k$ — однозначна гілка (переріз, селектор) F та $S^n \subset 2^{R^n}$, що є підмножиною множини всіх можливих підмножин із R^n .

Означення. Під дискретною динамічною системою із антисипацією $D_{n,p}$, що задає явну залежність майбутніх станів від минулих, будимо розуміти четвірку (F, N_0, R^{np}, S^n) , де $F : N_0 \times R^{np} \times S^n \rightarrow S^n$ правило, що визначає зміну станів динамічної системи, N_0 — множина цілих невід'ємних чисел, що задає дискретний час, R^n — множина параметрів ДС (p -вимірні дійсні вектори), S^n — множина станів ДС.

Означення. Станами ДСА заданої рівнянням (1.2) в дискретні моменти $i = 0, 1, \dots$, будемо називати такі множини $X_i = \bigcup_k \{x_k^i\} \in S^n$.

Часто під станом антисипаційної ДС розуміють саме x_i із (1.1), однак, в контексті даної роботи будемо притримуватись означення вище. При такому представленні нашої антисипаційної ДС через явну залежність поточного її

стану від попередніх (по часу), оператор F називатимемо *оператором еволюції* ДС із антисипацією.

Означення. Траєкторію ДС, задану правилом зміни станів в (1.2) під дією оператора $F(\cdot, \cdot)$, починаючи із стану v момент i , називатимемо *послідовність станів* $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$. Якщо k – скінченне, то мова, відповідно, йтиме про скінченну частину траєкторії.

Користуватимемося означенням метрики Хаусдорфа

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \rho(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \rho(x, y) \right\} \quad (1.3)$$

де $X, Y \in S^n$, $\rho(\cdot, \cdot)$ – метрика Евклідова.

Означення. Під *циклічною траєкторією* (циклом або періодичною орбітою) періоду p антисипаційної ДС розумітимемо набір послідовних точок $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}$ отриманих із (1.2) і таких, що p – найменше додатне, при якому $x_i = F^p(x_i, \Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} x_{i+p}$.

Наперед задамося достатньо малим значенням ε , яке представлятиме точність розрахунків періодичних орбіт нашої ДС.

Наближення траєкторії до циклу повинно задовольняти умові $d_H(x_i, F(x_{i+p-1}, \Lambda)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Практично, для визначення періоду використовуватимемо умову $d_H(x_i, F(x_{i+p-1}, \Lambda)) < \varepsilon$.

Означення. Збуреним станом ДС із антисипацією від стану $x_i \in S^n$ називатимемо такий стан $x'_i \in S^n$, що $d_H(x_i, x'_i) = \|\tilde{x}_i\|$, де $\tilde{x}_i \in R^n$ – збурення x_i .

Таке означення задає неоднозначність x'_i . Зрозуміло, що збурюючи x_i у різний спосіб за допомогою \tilde{x}_i так, щоб $d_H(x_i, x'_i) = \|\tilde{x}_i\|$, можна отримувати різні результати в ході ітерування (1.2). Для більшої визначеності будемо збурювати x_i наступним чином $x'_i = x_i + \tilde{x}_i = \{x \mid x - \tilde{x}_i \in X_i\}$.

1.4 Зв'язок антисипативних рівнянь із диференціальними включеннями та функціонально-диференціальними рівняннями

Клас систем із випередженням в значній мірі перетинається із диференціальними включеннями, що представляє собою добре вивчену область математики, яка взяла свій початок в працях Маршо та Заремба [49; 50] на початку минулого століття.

Під *диференціальним включенням* розуміють співвідношення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x, t),$$

де $x = x(t)$ – розв'язок, а $F(x, t)$ – задане багатозначне відображення, визначене на (x, t) і, зазвичай, $x \in R^n, t \in R$. Таким чином, в кожній точці (x, t) диференціальне включення задає пучок напрямків, а розв'язок може дотикатись довільного із них.

Розглянемо антисипативне рівняння першого порядку (1.1). Якщо вдається записати залежність x_i від x_{i-1} у явному вигляді, то, знову ж таки, цілком зрозуміло, що в загальному випадку така залежність описуватиметься багатозначним відображенням. Що задаватиме, відповідно, дискретний аналог системи із запізненням із багатозначною правою частиною.

Пік напрацювань в теорії включень припадає на другу половину минулого століття, що було обумовлено розвитком теорії управління, а саме – відкриттям принципу максимуму Понтрягіна. Це дало новий поштовх дослідженням диференціальних включень [47; 48; 51-54]. Наприклад, деякі припущення на керовану систему можна задавати через багатозначні відображення [55]. Більшість робіт присвячена дослідженню топології розв'язків та доведенню їх існування. Серед сучасних вітчизняних напрацювань в області дослідження стійкості включень є наступні [56-58].

Розвиненням диференціальних включень є клас *функціонально-диференціальних включень*

$$\dot{x} \in F(x(t), t),$$

де функція $x(t)$ визначена на $[t - \tau; t]$ при запізненні $\tau > 0$. При змінному запізненні розглядають клас [59]

$$\dot{x} \in F(x(t), x(t - \theta_1(t)), \dots, x(t - \theta_k(t)), t), \quad \theta_i \in [0; \tau], \quad i = \overline{1, k}$$

Теорія випередження знайшла своє відображення не лише в таких прикладних науках як економіка чи соціологія, а й досить давно відомі формальні постановки задач в теорії диференціальних рівнянь із аргументами, що відхиляються [60-63].

Визначають *функціонально-диференціальне рівняння* [60, с. 7; 61, с. 78]

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_k(t))), \quad t \in R$$

тут відображення $f : R \times R^{kn} \rightarrow R^n$ належить $C^{(0)}$, а для $i = \overline{1, k}$ $q_i(\cdot)$ — гомеоморфізми із збереженням орієнтації.

При $q_i(t) \leq t$ для $i = \overline{1, k}$ маємо справу із рівняннями із аргументом, що запізнюється (або просто із *запізненням*). На перевагу цьому, при $q_i(t) \geq t$ для всіх i — із аргументом, що відхиляється «вперед» (або простіше — *випередженням*). При $q_i(t) \equiv t$ та $i = \overline{1, k}$ маємо справу із, так званими, нейтральними відхиленнями аргументу (нейтрального типу) чи просто звичайним диференціальним рівнянням. Самі ж функції $q_i(t) - t$ отримали назву відхиленнями аргументу.

Саме підклас таких систем — системи із антисипацією із випереджаючим відхиленням, набуває все більшого інтересу у закордонних працях прикладного характеру.

Розглянемо, наприклад, систему із антисипацією 2-го порядку

$$x_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

Допустимо, що x_i при $i = 0, 1, 2, \dots$ є дискретизація деякої неперервної функції $x(t)$. Розглядаючи центральну скінчену різницю другого порядку $\ddot{x}(t) = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}$ із кроком дискретизації (сітки) рівним одиниці і

підставляючи у нього $x_{i-1} = f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$ та $x_{i+1} = f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$, отримаємо

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) - 2f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) + f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$$

або компактніше

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = f_1(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$$

що є скінчено-різницевою схемою для функціонально-диференціального рівняння із аргументами із випередженням та запізненням.

Приведемо приклад із [60, с. 12] постановки крайової задачі для рівняння із випередженням і запізненням для демонстрації типової ситуації для таких задач – багатозначності розв'язку

$$\dot{x}(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \frac{\pi}{2}x(t+1), \quad t \in [4, 6]$$

$$\dot{x}(t) \equiv 0, \quad t \in R \setminus [4, 6], \quad x(4) = a, \quad a \in R$$

Відповідний розв'язок:

$$x(t) = \begin{cases} a + C \sin \frac{\pi}{2}t, & t \in [4, 6] \\ a, & t \in R \setminus [4, 6] \end{cases}$$

Таким чином, бачимо, що постановка таких диференціальних задач із випередженням є некоректною, чим в тому числі й обумовлюється погана вивченість систем, динаміка яких задається такими рівняннями. А тим самим – проявляється складність в моделюванні та чисельному їх дослідженні.

Саме розгляд дискретних аналогів таких систем є першим важливим кроком в розбудові апарату подальшого прикладного дослідження динаміки систем із антисипацією. Такого апарату, який допоміг би у класифікації та дослідженні типів граничних траєкторій – їх циклічності, притаманності можливих хаотичних властивостей тощо. Саме це і визначатиме роль і місце досліджень даної дисертаційної роботи в області систем із випередженням.

1.5 Загальний аналіз логістичного рівняння із антисипацією

Значний інтерес у дослідженні АС із сильною антисипацією представляють системи із малим параметром зв'язку (системи зв'язних рівнянь), оскільки є джерелом дослідження їх синхронізації. Динаміка таких систем особливо важлива, оскільки описує взаємодію контрагентів, здатних до антисипації, у боротьбі за ресурси (розв'язання конфліктних ситуацій з обмежувачими умовами).

На сьогоднішній день малодослідженими залишаються сильні АС. Для дослідження такого роду обчислювальних систем першочерговими задачами постають: проведення загального аналізу відповідних відображень, виділення областей гіперінкурсії та інкурсії. Цьому й присвячено даний підрозділ.

Будемо розглядати динаміку АС із сильною антисипацією першого порядку, котра в загальному вигляді представляється як

$$x_{i+1} = f(x_i, x_{i+1}, \Lambda)$$

де $\Lambda = (\lambda; \alpha) \in R^2$ – вектор управляючих параметрів, $x_i \in R$, $i = 0, 1, \dots$;

В якості об'єкта дослідження таких АС було обрано модифіковане логістичне рівняння із привнесеною антисипаційною складовою

$$x_{i+1} = \lambda \cdot x_i \cdot (1 - x_i) - \alpha \cdot x_{i+1}^2 \quad (1.4)$$

де λ – параметр, що визначає логістичну частину АС та α – антисипаційні частину АС. Таке рівняння цікаве тим, що при управляючому векторі $\Lambda = (\lambda, 0)$ перетворюється на логістичне рівняння, котре володіє, як відомо, «багатою» динамікою, описуючи процес зміни чисельності популяцій. В ньому можна спостерігати перехід від регулярної поведінки до хаосу через подвоєння періоду [64]. Зрозуміло, що у динаміку такого процесу зміни чисельності популяцій доцільно включати фактори, що враховуватимуть оцінки («представлення») чисельності популяції в майбутньому, тобто включати деяке передбачення (антисипацію). Таке представлення інтуїтивно точніше представляє природний процес. Це відповідатиме слабкій АС.

Наступним рівнем складності буде включення саме сильної антисипаційної складової.

Базовий аналіз відображення (1.4) необхідний, в тому числі, для знаходження областей, де непорушні точки селекторів відповідного багатозначного оператора є стійкими. Дана інформація поєднуватиметься із результатами комп'ютерного моделювання наведеного в розділі 4.

Отже, непорушні точки відображення (1.4) знайдемо із $x = \lambda \cdot x \cdot (1 - x) - \alpha \cdot x^2$.

Ними, очевидно, є $x_1^* = 0$ та $x_2^* = \frac{\lambda-1}{\alpha+\lambda}$. Для подальшого загального аналізу дискретне відображення (1.4) зручно представити у вигляді $f_\lambda(x_i) = f_\alpha(x_{i+1})$, де

$$\begin{aligned} f_\lambda(x_i) &= \lambda x_i(1 - x_i) \\ f_\alpha(x_{i+1}) &= \alpha x_{i+1}^2 + x_{i+1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Екстремальні значення ж їх відповідно $f_\lambda(1/2) = \lambda/4$ та $f_\alpha(-1/2\alpha) = -1/4\alpha$. Співвідношення (1.4) задає в загальному випадку багатозначне відображення, визначене двома селекторами (гілками):

$$x_{i+1} = \begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda\alpha x_i(1 - x_i)}}{2\alpha} = f_{1,\alpha}^{-1}(f_\lambda(x_i)) = f_1(x_i) \\ \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda\alpha x_i(1 - x_i)}}{2\alpha} = f_{2,\alpha}^{-1}(f_\lambda(x_i)) = f_2(x_i) \end{cases}$$

Стійкість непорушних точок

Наступним кроком буде визначення областей стійкості непорушних точок в просторі управляючих параметрів. Для цього знайдемо похідні

кожної гілки $\frac{dx_{i+1}}{dx_i} = \frac{\lambda(1 - 2x_i)}{2\alpha \cdot x_{i+1} + 1} = \pm \frac{\lambda(1 - 2x_i)}{\sqrt{1 + 4\lambda\alpha \cdot x_i(1 - x_i)}}$. Зрозуміло, що

непорушна точка x_1^* буде стійкою при умові, коли її мультиплікатор по

модулю не перевищує 1: $\frac{|\lambda(1-2x)|}{\sqrt{1+4\lambda\alpha \cdot x(1-x)}} < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$, а непорушна точка

x_2^* – при умові

$$\frac{|\lambda(1-2x)|}{\sqrt{1+4\lambda\alpha \cdot x(1-x)}} < 1 \Leftrightarrow \left| 2\lambda + \lambda\alpha - \lambda^2 \right| < \sqrt{(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha + 4\alpha\lambda) + 4\alpha^2\lambda^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1-\lambda)(\lambda - 1/3)(\alpha + \lambda) \left(\alpha - \lambda \frac{\lambda - 3}{3\lambda - 1} \right) < 0.$$

На рис. 1.1 сірим кольором в просторі параметрів показані області стійкості

x_2^* .

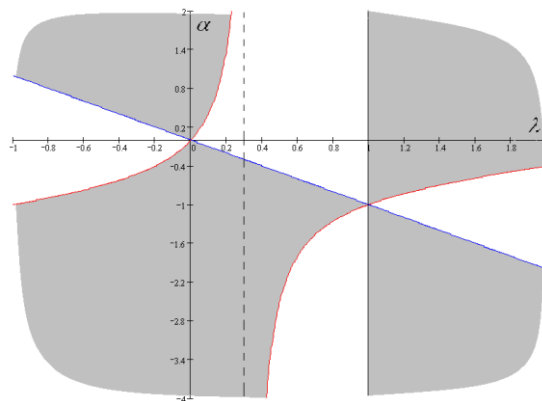


Рисунок 1.1. Области стійкості x_2^*

Різні типи гіперінкурсії

Як було описано вище, гіперінкурсія – явище, обумовлене множинністю розв’язків антисипаційного відображення. Нехай маємо траєкторію такої АС $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$, де $X_i = \{x_0^i, x_1^i, \dots, x_m^i\}$ – стан в дискретний момент часу i та $X_i = \bigcup_{j=1}^k f_j(X_{i-1})$, де f_j – селектори багатозначного оператора еволюції АС. Потужність стану X_i в цей момент часу $p_i = |X_i|$. Гіперінкурсивність може бути різних типів, наприклад, залежно від властивостей послідовності $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$. Перший характеризується необмежено зростаючою $p_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ (інколи називатимемо його накопичувальним), він представлятиме в подальшому для нас особливий інтерес, оскільки потужності станів в такому випадку можуть змінюватись різним чином

(регулярно, хаотично тощо), тим самим породжуючи складні структури в атракторах АС. Другий – із спадною $p_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Гіперінкурсія може бути й інших типів, наприклад, обумовлюватися такою послідовністю p_i , яка була б або обмеженою та не збіжною, або незмінною взагалі $p_i \equiv \text{const}$.

Зосередимося на першому типі такої гіперінкурсії, оскільки він передбачає, як ми побачимо далі у цьому та наступному розділах, утворення складних граничних структур та основні обчислювальні проблеми, що виникають при дослідженні АС. Зрозуміло, що необхідною умовою її виникнення є багатозначність, тобто виконання умови $1 + 4\lambda\alpha x_i(1 - x_i) > 0$ для (1.4). Однак цього не достатньо, оскільки деякі послідовності $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$, що стартують із окремих станів $y_0 = x_v^i$ можуть покидати область, яку розглядаємо або «перериватися» (переходити у комплексну площину). Тому, цей розділ присвячено в тому числі й питанню пошуку достатньої умови виникнення такого типу гіперінкурсії для відображення (1.4).

Так, багатозначність (1.4) матиме місце коли

$$\begin{cases} \alpha\lambda \in (-1; 0) & x_i \in R \\ \alpha\lambda > 0 & x_i \in (0.5 - \sqrt{1 + 1/\alpha\lambda}; 0.5 + \sqrt{1 + 1/\alpha\lambda}) \\ \alpha\lambda \in (-\infty; -1) & x_i \in (-\infty; 0.5 - \sqrt{1 + 1/\alpha\lambda}) \cup (0.5 + \sqrt{1 + 1/\alpha\lambda}; \infty) \end{cases}$$

Для виведення достатньої умови виникнення накопичувальної гіперінкурсії розглянемо чотири випадки нашої АС у вигляді (1.4) в просторі параметрів $(\lambda; \alpha)$ із різними наборами стійкості пар непорушних точок x_1^* та x_2^* (рис. 1.2). На рис. 1.2 зображено криві f_α і f_λ та діаграми Ламерея станів x_i нашої динамічної системи, утворені за допомогою цих кривих. Отже, на рис. 1.2.а зображені стани АС, обидві непорушні точки якої – стійкі, на 1.2.б – АС із обома нестійкими непорушними точками, рисунок 1.2.в зображує ітерації станів АС із єдиною стійкою непорушною точкою x_2^* та 1.2.г – із

єдиною стійкою x_1^* . Рисунок 1.2.а цікавий ще й тим, що наглядно можна спостерігати утворення структури із станів x_i АС. Це може бути предметом дослідження на наявність фрактальних властивостей, оскільки, тут присутня самоподібність. Нагадаємо, що структура є фракталом, якщо їй властива самоподібність в деякому сенсі та вона має не цілу фрактальну розмірність, більшу за топологічну.

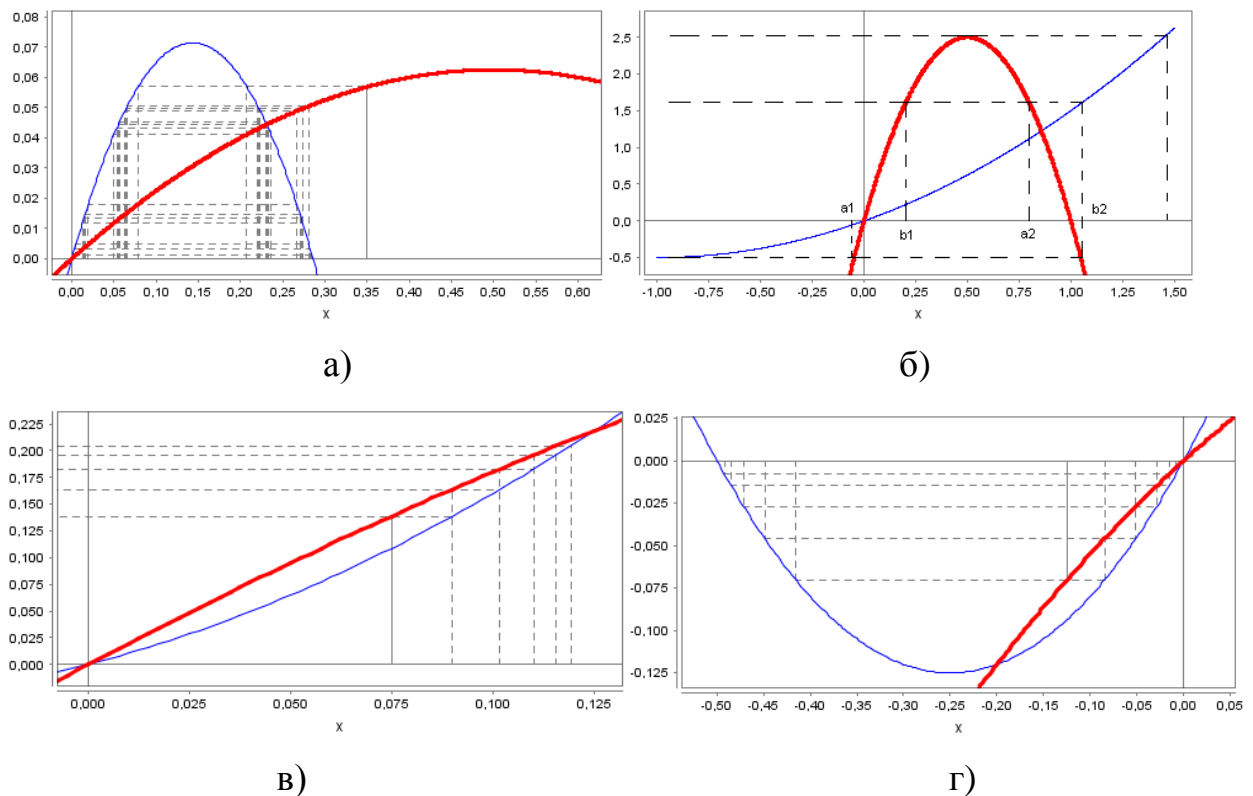


Рисунок 1.2. Діаграми Ламерея. Тонкою кривою позначені криві f_α , жирною – f_λ , пунктирною – утворюючі діаграму Ламерея лінії. а) перші п'ять ітерацій станів АС із параметрами ($\lambda = 0.25$; $\alpha = -3.5$) із початковою точкою, що належить обом басейнам притягіння; б) для ($\lambda = 10$; $\alpha = 0.5$); в) перших п'ять ітерацій при ($\lambda = 2$; $\alpha = 6$); г) перші п'ять ітерацій для ($\lambda = 0.5$; $\alpha = 2$)

З рисунку 1.2.б, при старті траєкторії АС із точок поза $(a_1; b_2)$ (кінці цього відрізка – точки, при яких f_λ збігається із екстремумом f_α) вона не матиме наступних дійсних значень, аналогічно, як і для будь-якої точки з

$(b_1; a_2)$. При старті ж із $(a_1; b_1)$ чи $(a_2; b_2)$ в силу нестійкості непорушних точок траєкторії покидатимуть зазначені області та переходитимуть у комплексу площину («перериватися») чи можуть утворювати цикл, точки якого належатимуть $(a_1; b_1)$ та $(a_2; b_2)$. У випадку стійкості однієї із непорушних точок (рис. 1.2.в та 1.2.г) видно, що ітерації по одному із селекторів можуть покидати басейн притягіння іншої непорушної точки чи «перериватися», тим самим порушуючи умову строгого зростання послідовності p_i . Тут під басейном розуміємо множину всіх таких траєкторій ДС, котрі притягаються відповідним атрактором.

Отже, для того, аби АС проявляла накопичувальну гіперінкурсивність достатньо, щоб щонайменше дві непорушні точки були стійкими і мали спільний басейн притягіння (до цього твердження повернемося у пункті 1.6.2).

1.6 Класифікація операторів однієї дискретної антисипаційної системи першого порядку [2]

В силу того, що широкий клас реальних задач, що постають при моделюванні різних соціальних, економічних, екологічних процесів треба розглядати зокрема із врахуванням антисипаційних складових, маємо підстави говорити про великий прикладний інтерес до такого класу ДС. Однак, на сьогоднішній день АС із сильною антисипацією все ще залишаються мало дослідженими, оскільки їх моделювання представляє собою нову область системного аналізу, а також є досить ресурсномісткою проблемою. В цьому підрозділі проведемо класифікацію залежності поведінки розв'язків від параметрів відповідних рівнянь, що задають дискретну АС із квадратичною нелінійністю та сильною антисипацією першого порядку та введемо достатню умову виникнення самоподібних структур в таких системах, котрі в подальшому можна було б розглядати як елементи, з яких будуються фрактали.

Опишемо модель, що розглядається. Для дослідження такого роду обчислювальних систем з антисипацією однією із важливих задач є проведення досліджень кривих оператора у простору параметрів. Наприклад, класифікацію типів розв'язків систем та поведінки зображуючих точок, зокрема, в частинних, але дуже цікавих випадках почергової чи одночасної стійкості та нестійкості нерухомих точок оператора, що визначає АС. Розглянемо сильну АС першого порядку із квадратичною антисипативною складовою, яку в загальному вигляді можна представити як

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n+1}, \Lambda), \quad x_n \in R, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

де $\Lambda = (\lambda; \alpha) \in R^2$ – вектор управляючих параметрів;

В якості найпростішого об'єкта дослідження такого виду АС будемо розглядати модифіковане логістичне рівняння із привнесеною антисипаційною складовою (1.4).

1.6.1 Класифікація оператора для квадратичної АС першого порядку

Проведемо класифікацію операторів дискретного відображення (1.4). Для цього перепишемо його наступним чином, враховуючі обмеження $\lambda \neq -1/\alpha, \lambda \neq 0, \alpha \neq 0$, обумовленні непорушною точкою $x_2^* = \frac{\lambda-1}{\alpha+\lambda}$:

$$\frac{(x_n - 1/2)^2}{(\lambda + 1/\alpha)/4\lambda} + \frac{(x_{n+1} + 1/(2\alpha))^2}{(\lambda + 1/\alpha)/4\alpha} = 1 \quad (1.6)$$

Побудуємо області зміни знаків знаменників на площині $(\lambda; \alpha)$ (рис.1.3.а). У першій та третій чвертях площини матимемо обидва знаменника додатними, тому співвідношення (1.6) прийме вид еліптичної кривої (рис.1.3.б) із діаметрами по осях $\sqrt{1 + 1/\alpha\lambda}$ та $\sqrt{\lambda/\alpha + 1/\alpha^2}$. Коли ж $(\lambda; \alpha)$ лежить у другій чверті площини над зображеною кривою та у четвертій чверті під нею – співвідношення (1.6) матиме вид гіперболи, у якої велика вісь паралельна осі x_n (рис.1.3.в). Якщо ж $(\lambda; \alpha)$ знаходиться під зображеною кривою у

другій чверті та над нею у четвертій чверті, то велика вісь гіперболи паралельна осі x_{n+1} (рис.1.3.г).

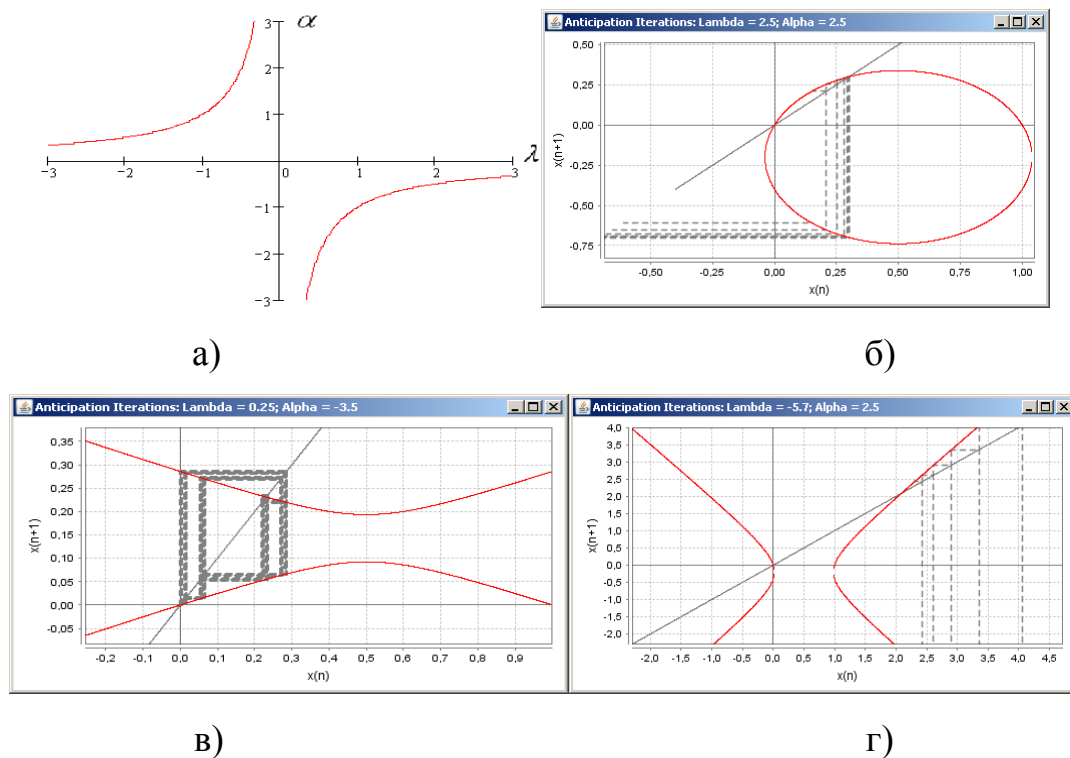


Рисунок 1.3. а) крива зміни знаків коефіцієнтів кривої 2-го порядку (2); б)-г) кілька ітерацій дискретного відображення (1.5) в різних областях $(\lambda; \alpha)$

Відстань між гілками гіперболи (великі осі) по осях x_n та x_{n+1} відповідно $\sqrt{1 + 1/\alpha\lambda}$ та $\sqrt{\lambda/\alpha + 1/\alpha^2}$ (рис.1.3.г та в – дві гіперболи).

Розглянемо особливі випадки. Для цього запишемо співвідношення (1.4) у вигляді

$$\Phi(x_n, x_{n+1}) = \alpha x_{n+1}^2 + x_{n+1} - \lambda x_n(1 - x_n) = k_{11}x_n^2 + k_{22}x_{n+1}^2 + 2k_{12}x_nx_{n+1} + 2k_{13}x_n + 2k_{23}x_{n+1} + k_{33}$$

Обчислимо детермінанти

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda/2 \\ 0 & \alpha & 1/2 \\ -\lambda/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{4}(1 + \alpha\lambda)$$

та $\Delta_2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = \alpha\lambda$, слід $S = sp \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \alpha + \lambda$ та інваріант відносно повороту системи координат

$$R = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{13} \\ k_{13} & k_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{23} & k_{33} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2 - 1}{4}$$

Випадок виродженої кривої другого порядку $\Delta_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \alpha\lambda = -1$. При $\lambda = 0$ і $\alpha\lambda \neq -1$ $\Delta_3 = \Delta_2 = 0$, а оскільки $R(\lambda = 0) = -1/4 < 0$, то маємо справу із виродженим випадком – двома паралельними прямими $x_{n+1} \equiv 0$, $x_{n+1} = -1/\alpha$ (рис.1.4.а). При $\lambda \neq 0$ та $\alpha\lambda = 1$ АС прийме вид виродженої гіперболи – двох прямих, що перетинаються із коефіцієнтом нахилу $\pm\lambda$ (рис.1.4.б). Зрозуміло, що в такому випадку при $\lambda = 1$ одна із прямих співпадає із прямою $x_{n+1} = x_n$ (рис.1.4.в), а при $\lambda = -1$ вона буде паралельною до $x_{n+1} = x_n$ (рис. 1.4.г). У випадку ж, коли коефіцієнт антиципації має значення нуль $\alpha = 0$, співвідношення (1.4) перетворюється на добре відоме логістичне відображення Ферхюльста.

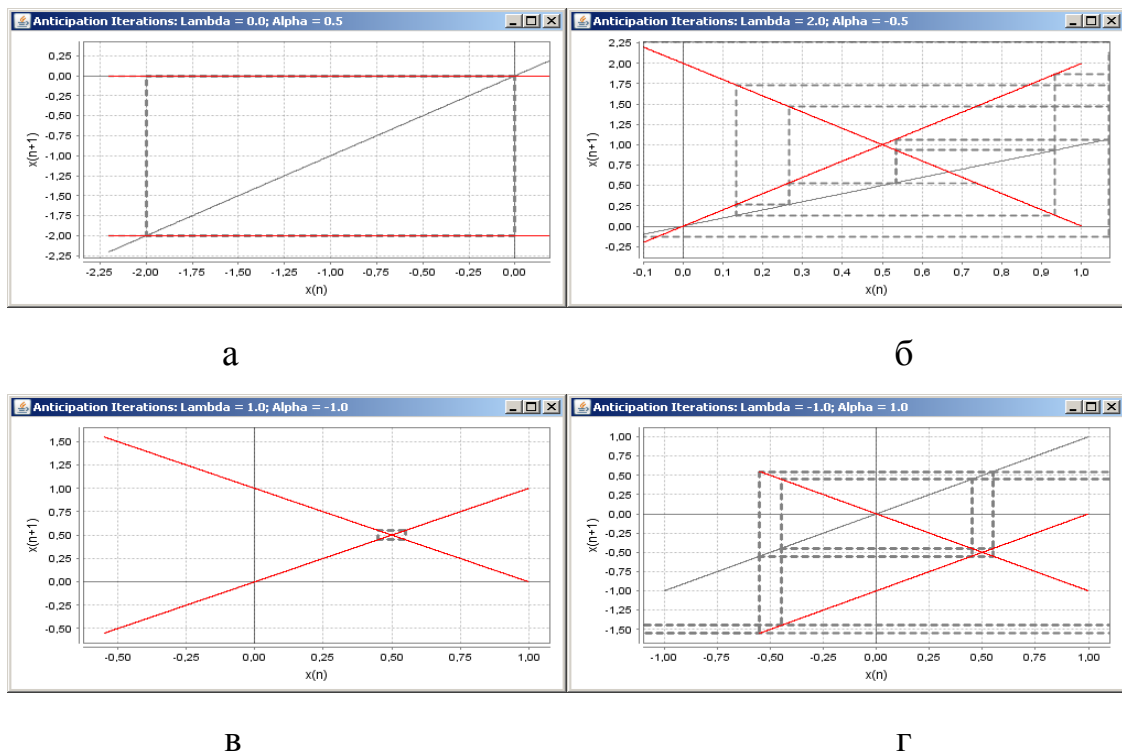


Рисунок 1.4. а)-г) кілька ітерацій дискретного відображення в особливих випадках.

1.6.2 Виникнення самоподібних структур

Розглянемо тепер досить важливу і цікаву з практичної точки зору проблему виникнення атрактора системи із самоподібною структурою, що в певній мірі може претендувати на фрактальність.

Розглядаємо АС (1.4) із управляючими параметрами ($\lambda = 0.25$; $\alpha = -3.5$).

У цьому випадку маємо для дискретної ДС із антисипацією $D_{1,2}$ два

селектори $f_{1,2}(x_n, (\lambda; \alpha)) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda\alpha x_n(1-x_n)}}{2\alpha}$, $(\lambda; \alpha) \in R^2$. Неважко

переконатися, що обидві нерухомі точки цієї системи при таких параметрах будуть стійкими (їх мультиплікатори по модулю не перевищують 1). Кілька перших ітерацій такої системи представлено на рис. 1.5.а, де ітерування станів (пунктирні лінії) здійснювалось згідно (1.5) у виді $f_\alpha(x_{n+1}) = f_\lambda(x_n)$,

де $f_\alpha(x_{n+1}) = \alpha \cdot x_{n+1}^2 + x_{n+1}$ та $f_\lambda(x_n) = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$.

Із нього видно, що при старті із точки $x_0 = 0.35$, що належить обом басейнам притягіння нерухомих точок x_1^* та x_2^* , матимемо гіперінкурсивне відображення, котре породжує самоподібну структуру, що в свою чергу може в деяких випадках перетворюватись на фрактал (у випадку фрактальної розмірності строго більшої за топологічну). Припустимо, що початкова точка x_0 одночасно належить обом басейнам притягіння нерухомих точок, але водночас кожна з цих нерухомих точок в свою чергу не належить до басейну притягіння іншої (рис. 1.5.б). На рис. 1.5.б схематично зображені області притягіння до нерухомих точок та початкове значення x_0 . В такому випадку послідовність $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ по кожній із гілок при умові багатозначності розв'язків системи (1.4) прямуватиме як завгодно близько до відповідної нерухомої точки (пунктирні стрілки на рис. 1.5.б). Однак, в момент, коли x_i покидатиме басейн притягіння другої точки, послідовність $\{x_{i_j}\}_{j=0}^\infty$, породжена початковою точкою $x_{i_0} = x_i$ і визначена другим селектором, вже не

прямуватиме до x_2^* . Таким чином, атрактор такої АС не володітиме самоподібністю, властивою для фрактальної структури. Тепер неважко сформулювати достатню умову породження фракталу атрактором сильної АС (1.4) [2]:

Теорема. *Для того, аби такого виду АС породжувала самоподібну структуру своїм атрактором достатньо, щоб басейни обох нерухомих точок співпадали.*

Доведення. Нехай нерухомі точки x_1^* і x_2^* є стійкими та їхні басейни притягіння є A , ітерації АС починаємо із довільної $X_0 = \{x_0\}$, $x_0 \in A$. Перша ітерація АС (1.4) буде $X_1 = \{x_0^1, x_0^2\}$, елементи якої отримано по селекторам $x_0^1 = f_1(x_0, \Lambda)$ і $x_0^2 = f_2(x_0, \Lambda)$ відповідно. Кожна з них належить спільному басейну притягіння нерухомих точок x_1^* і x_2^* , оскільки є образами точки із спільного басейну притягіння. Аналогічно і образ оператора еволюції $X_2 = \{x_0^{11}, x_0^{12}, x_0^{21}, x_0^{22}\}$ від X_1 по обом селекторам належить A :

$$x_0^{ij} = f_j(x_0^i, \Lambda); i = 1, 2; j = 1, 2.$$

Тобто кожна нова підмножина, породжена від x_1 під дією одного із селекторів прямуватиме до відповідної нерухомої точки. І так продовжуємо далі – кожна наступна множина x_i буде прямувати по кожному селектору до відповідної нерухомої точки, не покидаючи A та породжуючи самоподібність, що власне і є складовою процедури отримання фракталу. \square

Нагадаємо, що під фракталом розуміють самоподібну структуру з нецілою розмірністю, більшою за топологічну. Однак, варто відзначити, що це означення досить умовне, оскільки існують фрактали із цілою фрактальною розмірністю, наприклад, границя множини Мандельброта. Зазначимо, що аналогічним чином будуються і фрактали, що представляють фігури Серпінського різної розмірності (множина Кантора, трикутник та куб Серпінського тощо). В такому випадку кожна $x_0 \in A$ буде породжувати

самоподібну структуру. Зрозуміло, що не лише при таких умовах можуть виникати фрактальні структури (при розмірності більшої за топологічну).

Варто наголосити, що при старті траєкторія такої АС із множини, що є перетином басейну притяжіння однієї нерухомої точки (At - атрактор) та басейном відштовхування іншої (Rp - репеллер) динаміка такої АС може бути досить не простою, оскільки будуть існувати підтраєкторії (підпоследовності $x_j, j = 0, 1, \dots, x_0 \in At \cap Rp$, утворені як) АС, що можуть прямувати або у нескінченність, або переходити у комплексну площину чи повертатися назад в область перетину басейнів притяжіння і покидатимуть їх знову. Так, на рис. 1.5.в представлена п'ятдесята ітерація АС (1.4) із параметрами ($\lambda = 0.25; \alpha = -3.5$) ліворуч та скейлінг (збільшення малюнку) її частини праворуч, що демонструє чисельно самоподібність структури атрактора АС із такими параметрами (тим самим, даючи підстави для подальшого дослідження їх на предмет фрактальності).

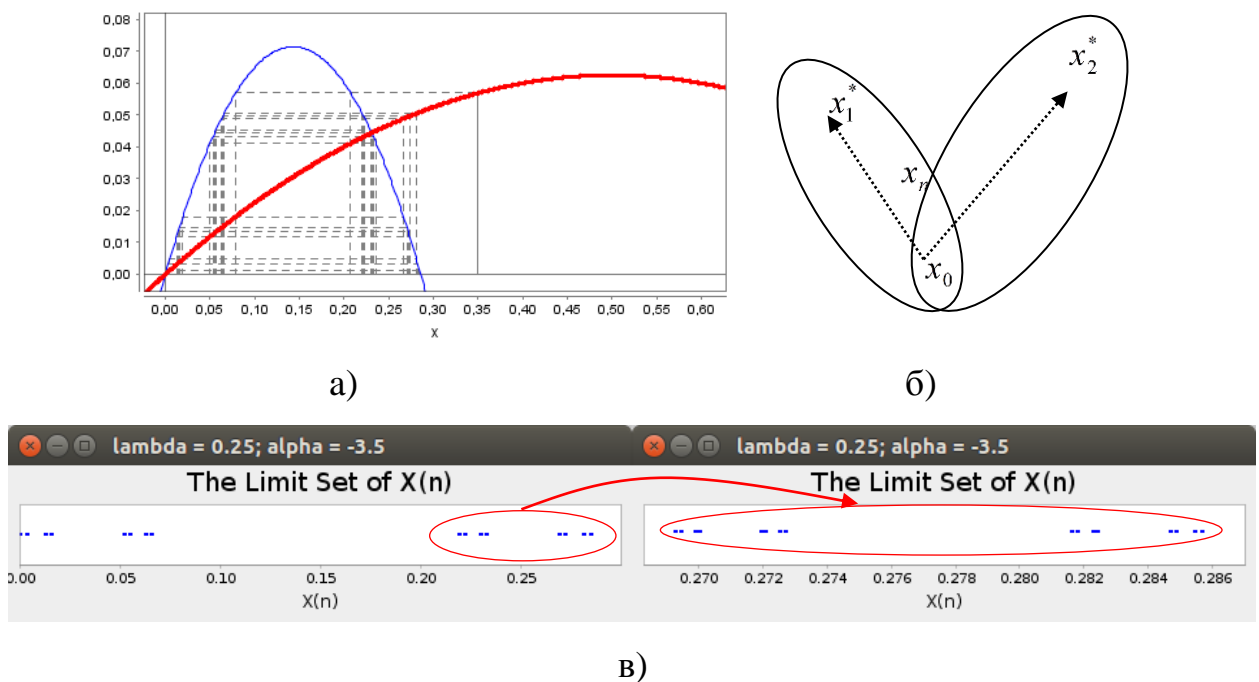


Рисунок 1.5. а) послідовність перших п'ять ітерацій АС із параметрами ($\lambda = 0.25; \alpha = -3.5$), f_α зображено тонкою синьою кривою, f_λ – жирною червоною; б) схематичне зображення ітерування початкової точки x_0 до нерухомих точок системи (2); в) демонстрація скейлінгу атрактора такої АС.

1.7 Постановка задачі

Опираючись на актуальність тематики, недостатню вивченість систем, яким властива сильна антисипативність та необхідність розробки інструментарію дослідження АС, сформулюємо постановку основної задачі дисертаційної роботи із наступних частин.

Розглядається клас дискретних сильних антисипативних систем першого порядку із гіперінкурсією. Даний клас представляє собою підклас дискретних систем із відхиляючимся аргументом із випередженням.

1. Дослідити поведінку системи з такого класу заданої у вигляді

$$x_{i+1} = f(x_i, x_{i+1}, \Lambda),$$

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\dim(\Lambda)}), x_i, \lambda_j \in R^n, i = 0, 1, \dots, j = \overline{1, \dim(\Lambda)}$$

на предмет фрактальних властивостей (самоподібності та Хаусдорфової розмірності) її станів. Тут x_i – стан неявно заданої системи, Λ – параметр системи, $f: R^n \times R^n \times R^{n \cdot \dim(\Lambda)} \rightarrow R^n$ – відображення, що передбачає нелінійність відносно x_{i+1} .

2. Узагальнити методи:

- а. побудови карт динамічних режимів

- б. побудови карти старшого показника Ляпунова

наряду із скороченням їх часових обчислювальних складностей, з метою використання цих методів для дослідження динаміки гіперінкурсивних антисипативних систем.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ

1. Проведено критичний аналіз предметної області дослідження систем із антисипацією; показано зв'язок сильних антисипативних систем із функціонально-диференціальними рівняннями із аргументами із випередженням та запізненням; виокремлено напрямки, яким присвячено роботу;

2. Досліджено простір параметрів нелінійної дискретної системи із сильною антисипацією. Встановлено області періодичної поведінки відповідної динамічної системи із запізненням з оператором еволюції, заданим багатозначним оператором;
3. Наведена класифікація операторів зв'язку квадратичної АС першого порядку;
4. В ході дослідження граничних множин систем із сильною антисипацією, сформульовано та доведено достатню умову виникнення самоподібних структур в цих множинах для випадку, коли антисипаційна система зводиться до динамічної системи із багатозначним оператором еволюції двох селекторів.

РОЗДІЛ 2.

РОЗМІРНОСТІ АТРАКТОРІВ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ

В попередньому розділі динамічні системи із антисипацією записувались в канонічному вигляді через оператор еволюції, котрий передбачав багатозначність розв'язків і міг бути записаний через багатозначний оператор. Зокрема, такий оператор можна представити набором селекторів. Невід'ємною складовою системного підходу у дослідженні систем, у тому числі із антисипацією, є аналіз граничних множин таких ДС. В даному розділі розглянуто аттрактори АС з точки зору їх фрактальних властивостей та супутні до них питання. Тут мова йде саме про аттрактори з наступної причини. Інваріантні множини дисипативних ДС (таких, для яких при еволюційному відображенні не зберігається міра n -вимірної області), є саме аттрактори [65, с. 27], а структура таких множин виділяється особливим різноманіттям та складністю. Фрактальні структури часто нерозривно пов'язані із самоподібними множинами та класифікуються, як їх частинний випадок. Мандельброт [66, с. 15] визначив фрактал як множину, у якої розмірність Хаусдорфа строго більша за топологічну. За Фальконером [67, с. xx-xxi (introduction)] він отримав менш строге означення. Воно задається набором умов, які властиві фракталу. Це – множина, часто, деякої самоподібної форми, «тонкої» будови (на малих масштабах) та фрактальною розмірністю більшою за топологічну, й до того ж, в більшості випадків її можна отримати рекурсивно виконуючи одну й ту саму процедуру.

В якості класичних фракталів можна навести множину Кантора, трикутних Серпінського, криві Коха, множину Мандельброта, траєкторія броунівського руху та багато інших.

Враховуючи той факт, що чисельне моделювання АС здійснюється рекурентним застосуванням оператора еволюції (правилом зміни стану ДС),

питання самоподібних множин та методів їх моделювання постають особливо актуально при розробці системного підходу у дослідженні АС.

Теорія самоподібних множин (self-similar sets) на сьогоднішній день представляє значний прикладний інтерес в області математичного моделювання. Всі основні методи побудови самоподібних множин на практиці базуються на рекурентних співвідношеннях [68]. До таких методів відносяться *L-системи* (системи Лінденмайера), системи ітерованих функцій (СІФ).

Суть L-системи зводиться до роботи скінченного автомата над деяким алфавітом [69]. Починаючи із слова ініціалізації(аксіоми), утвореного з цього алфавіту, по чергово застосовують правило переходу автомату (породжуюче правило). На кожній ітерації отримане слово перезаписується на нове. Така система була розроблена для формальних мов та біологічних моделей, є орієнтованою на графічне представлення та є досить складною в реалізації, бо треба мати спеціальний інтерпретатор роботи такої системи.

СІФ є простішими та більш зручними в реалізації. Теорія СІФ бере свій початок з робіт Дж. Хатчинсона [70], М. Барнслі [68], П. Морана [71] та ін., котрі стали вже класичними в цій області. Апарат СІФ використовується при побудові алгоритмів архівації даних – стисненні відео, звуку, зображень тощо [72-74] (фрактальні алгоритми стиснення із втратою даних). В їх основі часто лежать фрактальні властивості об'єктів стиснення. Так, їх робота головним чином складається із побудови СІФ таких афінних перетворень, котра максимально точно представляла б об'єкт стиснення або його частин, котрі мають властивості самоподібності. За допомогою такої СІФ можна досить швидко відновити початковий об'єкт, задавши початкову точку та застосувавши до неї СІФ достатню кількість разів. Зрозуміло, що при такому підході матиме місце часткова втрата даних. Це залежатиме від того, наскільки точно побудована СІФ апроксимує об'єкт стиснення. Збереження отриманої СІФ вимагає значно менше витрат.

Залежно від того, чи перетинаються області значень складових функцій, в СІФ розрізняють два види. Перші з них часто називають СІФ із самоперетинами (перекриттями), другі – без самоперетинів.

Обчислення Хаусдорфової розмірності (\dim_H) атракторів СІФ, без самоперетинів, є досить простим, на відміну від розрахунку \dim_H СІФ із самоперетинами, що є більш складною та менш вивченою проблемою в теорії СІФ, ще й останнім часом представляє все більший інтерес, в тому числі і прикладний. Обчисленню \dim_H із самоперетинами присвячено ряд робіт, як правило, зосереджених на частинних випадках СІФ. Серед таких робіт варто відзначити сучасні здобутки Ванга, Нгаї, Морана, Барані [75-79] та у роботах в їхніх посиланнях.

Серед базових робіт з вивчення СІФ із самоперетинами відзначимо К. Симона, Б. Солом'яка, М. Урбанські [80]. В їх працях проводиться розрахунок розмірностей Хаусдорфа граничних множин параболічних СІФ, що залежать від параметру та задовольняють, зокрема, трансверсальній умові.

Поміж частинних випадків самоперетинаючихся СІФ зазначимо роботи Барані [78; 79], де вивчаються СІФ, утворені із набору лінійних операторів, що мають спільні непорушні точки. Запропоновано метод розрахунку бокс та Хаусдорфової розмірностей атракторів, утворених такими СІФ. Результати отримані на множині майже всіх коефіцієнтів лінійних операторів.

Області значень операторів СІФ можуть перетинатися як завгодно. Тому, для зручності, такі СІФ поділяють за типами перетинів цих областей значень. Низка робіт Yang Wang та Sze-Man Ngai присвячена підходу в оцінці розмірності Хаусдорфа граничної множини СІФ, що задовольняє умові скінченної кількості типів околів [75]. Цей підхід базується на побудові орієнтованого графа інцидентності та його редукції. В якості вершин такого графу виступають всі можливі набори послідовностей застосування операторів СІФ. Вводиться поняття околу такої вершини. Автори зосереджуються на СІФ, котрі мають скінченну кількість таких околів. А вже

на основі спектрального радіуса матриці інцидентності цього графа і розраховують фрактальну розмірність граничної множини такої СІФ. В цих роботах показана рівність фрактальної та Хаусдорфової розмірностей для таких множин.

Також, можна виділити окремий напрям в оцінці розмірностей граничних множин СІФ із самоперетинами, що базується на зведенні початкової СІФ скінченного набору операторів, для якої не виконується умова OSC (умова відкритості множин), до СІФ із зліченим набором операторів, для якого вже виконується OSC. Розрахунок розмірності останнього вже не представляє складності. Серед робіт, в яких вперше були озвучені такі ідеї, є роботи М.Морана та Віталі [77]. Моран розглядає СІФ із самоперетинами, де набір операторів є класом Віталі. Автор показав, що будь-яку гіперболічну СІФ із самоперетинами можна звести до зліченної СІФ, для якої виконується OSC, чиї атрактори мають однакову фрактальну розмірність [77, с. 394]. Також, Мораном було показано, що зліченна СІФ може мати нульову міру Хаусдорфа, навіть, якщо вона задовольняє умові OSC.

Побудова фракталів та їх візуалізація нерозривно пов'язані із розвитком обчислювальної техніки. На сьогоднішній день розроблено багато програмних продуктів, що дають можливість будувати граничні множини СІФ.

Апарат СІФ, виходячи із їх властивостей, буде зручним інструментом у дослідженні ДСА. Тому в цьому розділі й описано фрактальні властивості атракторів ДСА з детальною ілюстрацією їх частинних випадків. А саме, розглянуті питання оцінки розмірності Хаусдорфа граничної множини оператора еволюції ДСА зверху [4; 81].

2.1 Основні поняття теорії систем ітерованих функцій та символної динаміки

Слідуючи означенням [67, с. 113; 68, с. 80; 70, с. 716], розглянемо скінченну систему функцій

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}, f_i: I \rightarrow I, I \subseteq \mathbb{R}^n, i = \overline{1, N} \quad (2.1)$$

визначених в повному метричному просторі (I, d) із метрикою $d_H(\cdot, \cdot)$, в якості якої розглядається метрика Хаусдорфа на всіх компактних підмножинах з I (1.3), де $X, Y \in \text{Comp}(I)$, $\rho(\cdot, \cdot)$ – Евклідова метрика на I .

Нехай кожне відображення $f_i \in \lambda_i$ -стисненням, тобто Ліпшицева константа кожного з них

$$\text{Lip}(f_i(I)) = \sup_{\substack{\forall x, y \in I, \\ x \neq y}} \frac{\rho(f_i(x), f_i(y))}{\rho(x, y)} = \lambda_i(I), \quad i = \overline{1, N}.$$

задовольняє умові $\lambda_i(I) < 1$.

Таку систему F на повному метричному просторі (I, d_H) називають (гіперболічною) системою ітерованих функцій із коефіцієнтом стиснення $\lambda(I) = \max_{i \in \overline{1, N}} \{\lambda_i(I)\}$ або просто λ .

Мультиплікаторами непорушної точки x^* оператора f_i називаються власні числа $\partial f(x^*)/\partial x$. Цілком розуміло, що у випадку лінійності f_i значення мультиплікатора співпадає із коефіцієнтом стиснення λ_i .

Через $H^d(\cdot)$ позначатимемо d -міру Хаусдорфа множини X

$$H^d(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\{u_i\}} \left(c_d \cdot \sum_i \text{diam}(u_i)^d \mid X \subset \bigcup_i u_i, \text{diam}(u_i) < \delta, \forall i \right) \quad (2.2)$$

із нормуючим коефіцієнтом c_d , покриттям $\{u_i\}$ множини X . Нормуючий коефіцієнт c_d вибирається таким чином, аби при цілих значеннях розмірності d він перетворював d -міру Хаусдорфа одиничного куба в R^n на 1 для зручності. При розрахунках мір Хаусдорфа множин дробових розмірностей цей коефіцієнт принципової ролі не грає [70, с. 720]. Й таке єдине дійсне d називають *розмірністю Хаусдорфа* ($\dim_H(X)$) множини X , якщо $H^\alpha(X) = 0$ для $\alpha > d$ та $H^\alpha(X) = \infty$ при $\alpha < d$.

В (2.2) покриття можуть бути різними. На практиці, зручніше покривати множину X такими $\{u_i\}$, елементи якого мають однаковий діаметр. Розмірність в такому випадку називають *розмірністю Мінковського* (чи бокс розмірністю) $\dim_B(X)$ множини X .

Оператор $B : \text{Comp}(I) \rightarrow \text{Comp}(I)$, що діє в метричному просторі на множині всіх непустих компактних підмножин із I :

$$B(K) = \bigcup_{x \in K} \bigcup_{i=1}^N f_i(x), \quad K \in \text{Comp}(I)$$

отримав назву оператора *Хатчинсона* чи оператора *Барнслі* [70]. Як добре відомо [70, с. 713], такий оператор в метриці Хаусдорфа має єдину

непорушну точку $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B^k(K) \Rightarrow A = B(A)$ в $\text{Comp}(I)$. Множину A , що є

інваріантною відносно дії оператора B , прийнято називати самоподібною множиною, якщо $H^d(A) > 0$ та $H^d(f_i(A) \cap f_j(A)) = 0$ для $i \neq j$, тут d — розмірність Хаусдорфа [70, с. 734].

Якщо для деякого набору функцій $F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ виконується умова $f_i(X) \cap f_j(X) = \emptyset$ для $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ і $i \neq j$ на деякій множині X , то кажуть, що F задовольняє умові *відкритих множин (OSC)* на X [70, с. 735].

Виходячи із означень самоподібності та OSC, можемо помітити досить важливу річ – самоподібна множина може бути утворена навіть операторами, області значень яких перетинаються. Головне, аби d -міра Хаусдорфа їх перетину була нульова.

Для інваріантних множин A оператора B , який задається СІФ, що задовольняє умові відкритих множин, вводять *самоподібну розмірність* s як

єдиний корінь рівняння $\sum_{s=1}^N \lambda_i^s = 1$. Поняття було введено Мандельбротом [70,

с. 714]. При невиконанні умови OSC, коли області значень операторів із СІФ перетинаються, формула Морана в загальному випадку не виконується. Хатчинсон у своїй роботі [70] показав, що Хаусдорфова розмірність атрактора СІФ, котра задовольняє умові відкритих множин, рівна самоподібній розмірності s . СІФ, що не задовольняють умові відкритих множин, називають СІФ із самоперетинами. Розрахунок розмірностей атракторів, утворених такими СІФ на порядок складніший від розрахунку розмірностей атракторів, утворених СІФ із OSC.

Дослідження СІФ, як правило, проводиться із застосуванням апарату символічної динаміки, хоча зустрічаються і багато робіт, що опираються на поняття розподілу ймовірностей перебування точки в деякій частині атрактора (наприклад, роботи Лаллея з виведення умов рівності розмірностей Хаусдорфа та Мінковського [82]). Символьна динаміка представляє собою потужний інструмент у дослідженні динаміки різноманітних систем: синхронізації хаосу [83], причинної ентропії [84] тощо. Тому, будемо використовувати її для вирішення наших поставлених у цьому розділі й наведемо основні необхідні її означення.

Визначають скінченний алфавіт $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$ символічної динаміки із СІФ F . Послідовність застосування операторів із F кодують послідовністю їх номерів $i = i_1 i_2 \dots i_p$, $i_j \in \Sigma$ для $j = \overline{1, p}$ та записують $i \in \Sigma^p$. У символічній динаміці i називають *словом* довжини p в алфавіті Σ . Довжину такого

слова i позначають через $|i| = p$. Ця послідовність визначає порядок композиції операторів із F

$$f_i(\cdot) = f_{i_1 i_2 \dots i_p}(\cdot) = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_p}(\cdot).$$

Тобто кожному слову ставиться у відповідність свій оператор.

Якщо слово пусте (тобто його довжина $|i| = 0$), то під $f_i(\cdot)$ розуміють тотожне відображення $f_i(x) = x$. Перші p символів у слові i записують як $i(p)$. Через Σ^* позначатимемо множину всіх скінчених послідовностей номерів із $\{1, 2, \dots, N\}$, тобто $\Sigma^* = \bigcup_{p \geq 0} \Sigma^p$ при всіх скінченних p . Через Σ^∞ позначатимемо множину всіх нескінчених послідовностей номерів із Σ . На Σ^∞ визначають адресне відображення $\pi: \Sigma^\infty \rightarrow A$. Для цього відображення центральне місце має наступна теорема.

Теорема 1 [72, с. 123]. Нехай ϵ повний метричний простір $(X, d(\cdot))$, гіперболічна СІФ $F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\} \mid f_i: X \rightarrow X, i = \overline{1, N}\}$ із аттрактором A . Тоді, границя $\pi(i) = \lim_{|i| \rightarrow \infty} f_i(x)$ існує, належить A та не залежить від вибору $x \in X$. Якщо $K \in \text{Comp}(X)$, то збіжність є рівномірною на $\forall x \in K$. Таким чином задана функція є неперервною.

Тобто результат нескінченного ітерування довільної початкової точки $x_0 \in X$ операторами буде залежати лише від послідовності індексів цих операторів і не залежати від цієї x_0 . Кажуть, що послідовність таких індексів i задає адресу $x \in X$. Варто відзначити, що x може мати більше ніж одну адресу, тобто адресне відображення π в загальному випадку є сюр'єктивним, до того ж неперервним. Якщо кожній точці A ставиться у відповідність унікальна адреса, то СІФ, що має своїм аттрактором A , називають повністю незв'язною [72, с. 115].

Сам аттрактор для F можна представити через множину адрес всіх його точок, тобто

$$A = \bigcup_{i \in \Sigma^\infty} \pi(i) \Leftrightarrow A = \lim_{p \rightarrow \infty} \bigcup_{i \in \Sigma^p} f_i(x)$$

(еквівалентність випливає безпосередньо із теореми 1) для $\forall x \in I$. Через $A_p(x) = \bigcup_{i \in \Sigma^p} f_i(x)$ позначатимемо p -те наближення інваріантної множини A , яке утворено початковою точкою x . Отже, за теоремою 1 бачимо, що $A = \lim_{p \rightarrow \infty} A_p(x)$ для $\forall x \in I$ та із зростанням p множина $A_p(x)$ все менше буде залежати від вибору x . Через

$$A_p = \bigcup_{x \in I} A_p(x)$$

позначатимемо p -те наближення інваріантної множини A . Для зручності подальших викладок перепишемо A_p наступним чином, увівши позначення

$$\bigcup_{x \in I} f_i(x) = A_i$$

$$A_p = \bigcup_{x \in I} A_p(x) = \bigcup_{x \in I} \bigcup_{i \in \Sigma^p} f_i(x) = \bigcup_{i \in \Sigma^p} \bigcup_{x \in I} f_i(x) = \bigcup_{i \in \Sigma^p} A_i \quad (2.3)$$

Звернемо увагу на те, що множина $\{A_i\}$ покриває наш аттрактор A .

На рис. 2.1 проілюстровано кілька ітерацій побудови A . Так, заштриховані області схематично представляють множини A_0, A_1, A_2 , а множини адрес всіх цих точок відповідають множинам $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$. Цілком зрозуміло, що $\Lambda_i \cap \Lambda_j \neq \emptyset$ буде виконуватись лише одночасно із $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

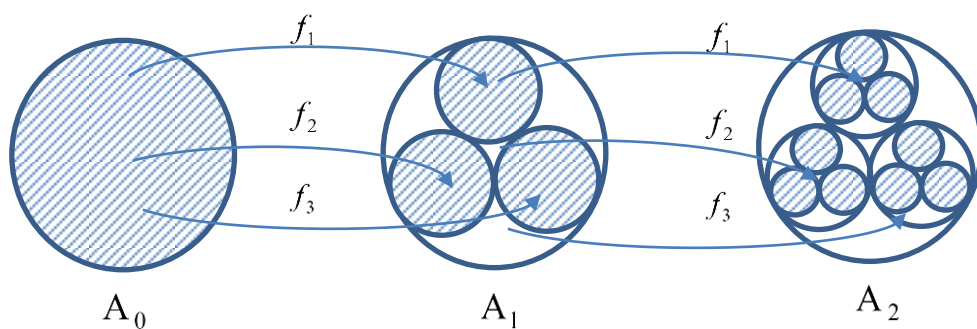


Рисунок 2.1. Послідовність множин A_0, A_1, A_2

На множині $\Sigma^* \cup \Sigma^\infty$ визначають відношення *лексикографічного порядку* наступним чином. Нехай маємо два слова $i, j \in \Sigma^* \cup \Sigma^\infty$ у яких співпадають перші $k-1$ символів $i(k-1) = j(k-1)$. Якщо $i_k > j_k$, то кажуть, що слово j передує слову i . На множині $\Sigma^* \cup \Sigma^\infty$ також визначають операцію злиття слів (конкатенацію). Якщо $i \in \Sigma^p$ скінчене слово та $j \in \Sigma^* \cup \Sigma^\infty$, то через $ij = i_1 i_2 \dots i_p | j_1 j_2 \dots \in \Sigma^* \cup \Sigma^\infty$ позначають їх *конкатенацію*, а i в такому випадку називають *початковим сегментом* слова ij .

Нехай оператор $f_i = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_p}$, що відповідає слову i із коефіцієнтом стиснення $\lambda_i = \lambda_{i_1} \circ \lambda_{i_2} \circ \dots \circ \lambda_{i_p}$.

Тепер, з точки зору адресного простору зосередимося на процесі ітерування $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots$, що сходиться до нашого атрактора A . Нехай деяке $k \geq 0$ є номером ітерації СІФ. Розглянемо тепер адреси точок, що входять в множини A_k . Введемо позначення множини Λ_k , що представляє собою набір усіх таких слів $i \in \Sigma^*$, для яких буде справедливою умова

$$\lambda_i \leq \lambda_{\min}^k, \text{ але } \lambda_j > \lambda_{\min}^k, \text{ тут } \lambda_{\min} = \min_{i \in \Sigma} \{\lambda_i\}$$

у випадку, коли j є початковим сегментом слова i (рівносильне $i(|j|) = j$), тобто $i = jn$, де n - деяке слово з Σ^* (можливо порожнє). Цілком зрозуміло, що якщо $\lambda < 1$, то $\lambda_i \leq \lambda_j$, бо $\lambda_i = \lambda_{jn} \leq \lambda_j \lambda_n \leq \lambda_j$ при $\lambda_n \leq 1$. Іншими словами множина Λ_k представляє всі такі скінченні адреси i , для яких відповідні стиснення λ_i потрапляють у пів інтервал $\lambda_{\min}^{k+1} < \lambda_i \leq \lambda_{\min}^k$. Така Λ_k буде не порожня, бо включатиме хоча б одну адресу, що відповідає найменшому стисненню на даній ітерації $i_i = \lambda_{\min}$, $i = 1, \dots, |i|$.

На практиці умова OSC виконується рідко, оскільки вона є досить жорсткою. Слабшою за OSC в теорії символічної динаміки є умова слабкої роздільності (weak separation condition).

Означення [85, с. 74]. Кажуть, що СІФ задовольняє умові слабкої роздільності (WSC), якщо існують такі $x_0 \in I$ та $c > 0$, що для будь-яких номера k , елемента $x \in I$ та скінченної послідовності j із Σ^* , кількість таких f_i , $i \in \Lambda_k$, що $f_i \circ f_j(x_0) \in B_{\lambda^k}(x)$ не перевищує c , де $B_{\lambda^k}(x)$ — окіл x радіуса λ^k .

Цернером [86] було показано, що система ітерованих функцій, для якої виконується умова WSC має атрактор додатної Хаусдорфової міри. Що є досить важливим результатом в теорії СІФ, оскільки зліченні СІФ, для яких не виконується умова OSC, можуть таки мати додатну міру Хаусдорфа, і як наслідок — деяку розмірність Хаусдорфа, якщо для цієї СІФ буде виконуватись WSC.

2.2. Розрахунок фрактальних розмірностей граничних множин СІФ. Метод Ngai-Wang [75]

Автори Ngai та Wang [75] будують граф інцидентності наступним чином. В кожній вершині розміщують тільки ті трійки v_i з множини

$$V_k = \{ v_i = (\lambda_i, f_i(0), k) \mid i \in \Lambda_k \},$$

які належать одному типу околу. Отже, кількість вершин такого графу буде рівною кількості типів околів.

В трійках множини V_k розрахунок $f_i(\cdot)$ (згідно із результатом теореми 1) ведеться з нуля для зручності та без втрати узагальненості. Коефіцієнт λ_i входить в вершину v_i в силу сур'єктивності адресного відображення π , аби розрізняти вершини v_i (на тій самій ітерації k може бути кілька вершин, у яких $f_i(0) = f_j(0)$ де $i, j \in \Lambda_k$).

Позначення $f_v(x) = f_i(x)$ вводиться, аби показати, що два слова $i, j \in \Lambda_k$ для яких виконується $f_i(0) = f_j(0)$, асоціюватимуться з однією вершиною v_i .

Множини $P_k = \{f_i(0) \mid i \in \Lambda_k\}$ $k = 0, 1, \dots$ є важливим інструментом в символній динаміці ще й з іншої сторони – С.П. Лаллей показав [87], що саме через темп росту кардинальних чисел $|P_k|$ $k = 0, 1, \dots$ можна розрахувати розмірність Хаусдорфа $\dim_H(F)$ атрактора СІФ F .

Зрозуміло, що із-за сур'єктивності відображення π , матимемо $|P_k| \leq |\Lambda_k|$.

Ngai та Wang вводять поняття *сусідніх вершин* $v, u \in V_k$ наступним чином.

Розглядається не порожня множина Ω , що є обмеженою і відкритою в R^n та для всіх операторів з СІФ (2.1) виконується $f_i(\Omega) \subseteq \Omega$. Якщо для вершин $v, u \in V_k$ порушується умова $f_v(\Omega) \cap f_u(\Omega) = \emptyset$, то такі вершини вважаються сусідніми. Така множина Ω завжди існує (згідно доведення у [75]).

Множина $\Omega(u)$ всіх сусідніх до u вершин називається *околом* u .

Ключове поняття їх підходу полягає у введені такої характеристики СІФ як *скінченність типів околів* [75, с. 3]. Тут під *типом околу* розуміється існування такого стискаючого оператора $\tau : I \rightarrow I$, $I \subseteq R^n$, котрий увесь окіл вершини відображає точно в окіл її сусідньої вершини, тобто виконується умова

$$\{\tau \circ f_u \mid u' \in \Omega(u)\} = \{f_v \mid v' \in \Omega(v)\} \text{ та } \tau \circ f_u = f_v$$

Далі, власне, і будується матриця інцидентності $S = \{s_{ij}\}$. Елемент s_{ij} матриці визначається як кількість вершин j -го типу околу, які є образами i -ї вершини. Іншими словами, s_{ij} означає, що вершина i -го типу околу під дією системи операторів F відображається у вершини, серед яких є s_{ij} вершин із j -м типом околу.

Нарешті, Ngai та Wang показують, що розмірності множини Λ

$$\dim_H(A) = \dim_B(A) = \frac{\log r(S)}{-\log \min_i \lambda_i},$$

тут $r(S)$ – спектральний радіус S .

2.3 Оцінка розмірності Хаусдорфа для атрактора ДСА без самоперетинів

На практиці аналітичний розрахунок розмірності Хаусдорфа, користуючись означенням (2.2), є дуже складною задачею. Часто її розв'язують оцінюючи розмірність зверху та знизу. В якості оцінки зверху зазвичай використовують розмірність Мінковського (бокс-розмірність), а в якості оцінки знизу – результат леми Фростмана, яка стверджує наступне:

Лема [67, с. 55]. Хаусдорфова міра борелевої множини M буде додатною, для деякого $s > 0$ тоді і тільки тоді, коли на M буде така додатна міра $\mu(\cdot)$, що для будь-якої підмножини $U \subseteq M$ та деякої константи $c > 0$ буде виконуватись $\mu(U) \leq c \cdot \text{diam}(U)^s$.

Цю $\mu(\cdot)$ називають розподілом мас, а попередню лему – принципом розподілу мас [88, с. 11].

Тепер проведемо оцінку зверху для розмірності Хаусдорфа множини A для СІФ (2.1) із нелінійними функціями використовуючи апарат символічної динаміки. У центрі уваги випадок, коли F задовольняє умові OSC. Розглядаємо p -те наближення A_p (2.3) інваріантної множини A системи F . Очевидно, що для підмножини A_i із множини A_p виконується умова $\text{diam}(A_i) \leq \lambda_i \cdot \text{diam}(A)$ [70, с. 724], тут під λ_i розуміють Ліпшицевий коефіцієнт композиції $f_i(\cdot)$. Неважко переконатися, що $\lambda_i = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_{|i|}} \leq \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_{|i|}}$. Нерівності тут перетворюються у рівності у випадку, коли кожне стиснення з F буде подібністю в R^n [77, с. 389].

Взявши до уваги лему Фростмана, оцінимо d -міру Хаусдорфа самоподібної множини A_p зверху згідно (2.2), опускаючи нормуючий коефіцієнт c_d ,

оскільки нам для розрахунку розмірності важливо лише те, аби міра була скінченною та строго більшою за нуль, тому c_d нас не цікавить

$$H^d(A_p) = H^d\left(\bigcup_{i \in \Sigma^p} A_i\right) \leq \sum_{i \in \Sigma^p} H^d(A_i) \leq \sum_{i \in \Sigma^p} \text{diam}(A_i)^d$$

Діаметр множини A_i [88, с. 11]

$$\begin{aligned} \text{diam}(A_i) &\leq \lambda_i(I_{|i|}) \cdot \text{diam}(A) \leq \\ &\leq \lambda_{i_1}(I_1) \cdot \lambda_{i_2}(I_2) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I_p) \cdot \text{diam}(A) \end{aligned}$$

а тому справедлива й d -сума по $i \in \Sigma^p$

$$\sum_{i \in \Sigma^p} \text{diam}(A_i)^d \leq \sum_{i \in \Sigma^p} \left(\lambda_{i_1}(I_1) \cdot \lambda_{i_2}(I_2) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I_p) \cdot \text{diam}(A) \right)^d, \quad (2.4)$$

тут $I_p \equiv I$, $I_{p-j} = f_{i_{p-j+1}}(I_{p-j+1})$, для $j = \overline{1, p-1}$. В силу стиснення f_i матимемо $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_p$. Оцінимо зверху коефіцієнти стиснення

$$\lambda_{i_j}(I_j) \leq \lambda_{i_j}(I) \text{ для } \forall j, \quad (2.5)$$

тому й $\lambda_{i_1}(I_1) \cdot \lambda_{i_2}(I_2) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I_p) \leq \lambda_{i_1}(I) \cdot \lambda_{i_2}(I) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I)$, продовжуємо (2.4) – розглядаємо найменше стиснення на всьому I .

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Sigma^p} \left(\lambda_{i_1}(I_1) \cdot \lambda_{i_2}(I_2) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I_p) \cdot \text{diam}(A) \right)^d &\leq \\ &\leq \sum_{i \in \Sigma^p} \left(\lambda_{i_1}(I) \cdot \lambda_{i_2}(I) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I) \cdot \text{diam}(A) \right)^d = \\ &= \text{diam}(A)^d \cdot \sum_{i \in \Sigma^p} \left(\lambda_{i_1}(I) \cdot \lambda_{i_2}(I) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I) \right)^d = \text{diam}(A)^d \cdot \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i(I)^d \right)^p \end{aligned}$$

Отже, оцінка зверху $\overline{H^d(A)}$ буде такою

$$\overline{H^d(A_p)} \stackrel{def}{=} diam(A)^d \cdot \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i(I)^d \right)^p$$

Тут використали той факт, що сума всіх можливих комбінацій добутків чисел з деякого набору можна представити як суму цих чисел у степені p , тобто

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i^d \right)^p = \sum_{\mathbf{i} \in \Sigma^p} (a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_p})^d$$

[70, с. 727]. Тут в ролі a_i виступатимуть коефіцієнти стиснень $\lambda_i(I)$ на I .

Звідси при переході $p \rightarrow \infty$ матимемо умову при якій $0 < \overline{H^d}(A) < \infty$:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(I)^d = 1 \quad (2.6)$$

Вона відповідає формулі Морана, де мультиплікатори узагальнено максимальними коефіцієнтами стиснень $\lambda_i(I)$ на всьому I для кожного із відображень f_i . Використаємо ту властивість d -міри Хаусдорфа, що із $H^d(E_1) \leq H^d(E_2)$, де $E_1 \subseteq E_2$, виконується нерівність розмірностей Хаусдорфа $\dim_H(E_1) \leq \dim_H(E_2)$. Таким чином, маємо оцінку для $\dim_H(A)$ зверху $\dim_H(A) \leq d$, де d – єдиний розв’язок (2.6).

2.4 Оцінка розмірності Хаусдорфа для атракторів ДСА із самоперетинами частинного випадку

Зрозуміло, що СІФ, які розглядаються в методі Ngai та Wang, є лише частинним випадком СІФ із самоперетинами. Так, автори робіт [76] зосереджуються на окремому клас СІФ із самоперетинами (надалі клас \mathcal{H}), у якому, в загальному випадку, СІФ не є системами із самоперетинами скінченного типу околів і як наслідок – метод Ngai та Wang не буде тут працювати.

Автори [76] виводять формулу розрахунку фрактальної розмірності СІФ такого класу \mathcal{H} . До того ж, показано, що \mathcal{H} може перетинатися із класом СІФ, для яких виконується умова скінченного типу околів та запропоновані формули для обох класів не суперечать одна одній в такому випадку.

Формули отримані в [76] опираються на випадок із лінійною системою функцій в (2.1). На оцінці розмірності Хаусдорфа $\dim_H(A)$ зверху для СІФ з \mathcal{H} ми і зосередимося в цьому підрозділі, однак розглядатимемо в якості (2.1) нелінійні функції.

Клас \mathcal{H} визначається наступними умовами [76, с. 121]:

- 1) Набір операторів $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ з системи F можна розбити на два набори таким чином, що для кожного з них оператори не перетинаються на області визначення (тобто для кожного з наборів виконується умова OSC);
- 2) кожному оператору із Σ_1 ставиться у відповідність такий оператор з Σ_2 , що обидва перетинаються;
- 3) Для кожної такої пари $i \in \Sigma_1$ та $j \in \Sigma_2$ з умови №2 (тобто $f_i(\cdot) \cap f_j(\cdot) \neq \emptyset$) існують такий номер $n_{ij} \in \Sigma_2$ та скінченне слово $j_{ij} \in \Sigma_2^*$, що $f_i(\cdot) \cap f_j(\cdot) \subseteq f_i \circ f_{n_{ij}}(\cdot)$ та $f_i \circ f_{n_{ij}} = f_j \circ f_{j_{ij}}$;

З цих умов лише третя є досить жорсткою, через це \mathcal{H} стає досить вузьким та специфічним.

Для подальшої зручності введено такі позначення:

$$B_i = \{ j \in \Sigma_2 \mid f_i(\cdot) \cap f_j(\cdot) \neq \emptyset \}$$

$$C_i = \{ n_{ij} \in \Sigma_2 \mid j \in B_i \}$$

$$D_i = \Sigma_2 \setminus C_i$$

У [76] показано кілька важливих результатів для \mathcal{H} , котрі ми в подальшому використаємо:

- 1) можна виділити такий набір операторів $F_3 = \{f_{ij} \mid i \in \Sigma_1^*, i \in \Sigma_1, j \in D_i\}$, котрий разом із операторами алфавіту Σ_2 задовольняє умові OSC;
- 2) така СІФ задовольняє умові WSC, а тому існує деяка Хаусдорфова розмірність такого атрактора (див. підрозділ 2.1);
- 3) кожна точка A належить атрактору оператора Хатчинсона з об'єднання функцій із Σ_2 та F_3 .

У [76] наводяться наступні формули для розрахунку розмірності Хаусдорфа.

Якщо $D_i = \emptyset$ для всіх $i \in \Sigma_1$, то

$$\sum_{j \in \Sigma_2} \lambda_j^s = 1, \quad (2.7a)$$

інакше

$$\sum_{i \in \Sigma} \lambda_i^s - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i^s \sum_{j \in C_i} \lambda_j^s = 1 \quad (2.7b)$$

Випадок (2.7a), як можна побачити, виникає тоді, коли атрактор, утворений виключно операторами з Σ_1 , повністю лежить в аттракторі, утвореному операторами з Σ_2 , тобто розрахунок Хаусдорфової d -міри здійснюється лише по операторах з Σ_2 .

Позначимо через Σ_3 деякий алфавіт усіх таких унікальних слів $w = iij$ з F_3 . Використовуючи апарат символної динаміки, покажемо, що за допомогою формул (2.7a) та (2.7b) можна отримати оцінку зверху розмірності Хаусдорфа атрактора A для СІФ (2.1) із нелінійними операторами.

Взявши до уваги третій результат для \mathcal{H} , p -те наближення інваріантної множини A (2.3) системи (2.1) можемо записати так

$$A_p = \bigcup_{m \in \Sigma_2^p \cup \Sigma_3^p} A_m = \bigcup_{i \in \Sigma_2^p} A_i \cup \bigcup_{w \in \Sigma_3^p} A_w,$$

бо в якості алфавіту із витриманою умовою OSC тут виступатиме $\Sigma_2^p \cup \Sigma_3^p$.

Тому і d -міра буде сумою:

$$H^d(A_p) = H^d\left(\bigcup_{i \in \Sigma_2^p} A_i\right) + H^d\left(\bigcup_{w \in \Sigma_3^p} A_w\right), \quad (2.8)$$

тут всі слова w згідно першого результату для \mathcal{H} представимо як $w = iij$.

Розпишемо оцінку цієї d -міра зверху $\overline{H^d(A_p)}$ слідуючи означенню міри (2.2).

З тих же міркувань, що й у попередньому підрозділі, опускаючи нормуючий коефіцієнт (для розрахунку розмірності важливо лише те, аби міра була скінченною та строго більшою за нуль). Оцінюємо перший доданок (2.8) аналогічно тим викладкам, що й для випадку без самоперетинів, беручи до уваги (2.5):

$$\begin{aligned} H^d\left(\bigcup_{i \in \Sigma_2^p} A_i\right) &\leq \sum_{i \in \Sigma_2^p} H^d(A_i) \leq \sum_{i \in \Sigma_2^p} \text{diam}(A_i)^d \leq \sum_{i \in \Sigma_2^p} (\lambda_i(I_{|i|}) \cdot \text{diam}(A))^d \leq \\ &\leq \sum_{i \in \Sigma_2^p} (\lambda_{i_1}(I_1) \cdot \lambda_{i_2}(I_2) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I_p) \cdot \text{diam}(A))^d \leq \\ &\leq \text{diam}(A)^d \cdot \sum_{i \in \Sigma_2^p} (\lambda_{i_1}(I) \cdot \lambda_{i_2}(I) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I))^d = \text{diam}(A)^d \cdot \left(\sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d\right)^p \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для оцінки другого доданку (2.8) $H^d\left(\bigcup_{w \in \Sigma_3^p} A_w\right)$ притримуємося тієї ж

послідовності міркувань

$$\begin{aligned} H^d\left(\bigcup_{w \in \Sigma_3^p} A_w\right) &\leq \sum_{w \in \Sigma_3^p} H^d(A_w) \leq \sum_{iij \in \Sigma_3^p} \text{diam}(A_{iij})^d \leq \\ &\leq \sum_{iij \in \Sigma_3^p} (\lambda_{iij}(I_{|iij|}) \cdot \text{diam}(A))^d \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_p \in \Sigma_3^p} \left(l_{\mathbf{w}_1}(J_1) \cdot l_{\mathbf{w}_2}(J_2) \cdot \dots \cdot l_{\mathbf{w}_p}(J_p) \cdot \text{diam}(A) \right)^d \quad (2.10)$$

де

$$J_p \equiv I, J_{p-k} = f_{\mathbf{w}_{p-k+1}}(J_{p-k+1}), \text{ для } k = \overline{1, p-1}.$$

По аналогії із I_i матимемо $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_p$ в силу стиснень композиції $f_{\mathbf{w}}$.

Коефіцієнти стиснення $l_{\mathbf{w}_k}$ тут

$$l_{\mathbf{w}_k}(J_k) = \lambda_{i_k}(J_{k_0}) \lambda_{i_k}(J_{k_2}) \lambda_{j_k}(J_{k_1}), J_{k_0} = J_k, J_{k-1} = f_{j_k}(J_{k_2}).$$

Враховуючи (2.5), оцінимо значення $l_{\mathbf{w}_k}$ зверху так

$$l_{\mathbf{w}_k}(J_k) \leq \lambda_{i_k}(I) \lambda_{i_k}(I) \lambda_{j_k}(I)$$

на всьому I , тому продовжуємо (2.10)

$$H^d \left(\bigcup_{\mathbf{w} \in \Sigma_3^p} A_{\mathbf{w}} \right) \leq \sum_{\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_p \in \Sigma_3^p} \left(l_{\mathbf{w}_1}(J_1) \cdot l_{\mathbf{w}_2}(J_2) \cdot \dots \cdot l_{\mathbf{w}_p}(J_p) \cdot \text{diam}(A) \right)^d \leq \text{diam}(A)^d \cdot \sum_{i_1 i_1 j_1 \dots i_p i_p j_p \in \Sigma_3^p} \left(\lambda_{i_1}(I) \lambda_{i_1}(I) \lambda_{j_1}(I) \cdot \lambda_{i_2}(I) \lambda_{i_2}(I) \lambda_{j_2}(I) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I) \lambda_{i_p}(I) \lambda_{j_p}(I) \right)^d \quad (2.11)$$

Знову ж таки, використаємо рівність $\left(\sum_{i=1}^N a_i^d \right)^p = \sum_{\mathbf{i} \in \Sigma^p} (a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_p})^d$ [70, с.

727], де в ролі a_i вже виступають коефіцієнти стиснень, що відповідають словам \mathbf{w}_k довжини p на I

$$\begin{aligned} \sum_{i_1 i_1 j_1 \dots i_p i_p j_p \in \Sigma_3^p} \left(\lambda_{i_1}(I) \lambda_{i_1}(I) \lambda_{j_1}(I) \cdot \lambda_{i_2}(I) \lambda_{i_2}(I) \lambda_{j_2}(I) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_p}(I) \lambda_{i_p}(I) \lambda_{j_p}(I) \right)^d = \\ = \left(\sum_{i_k i_k j_k \in \Sigma_3} \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d \right)^p \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тут варто відзначити, що у суму входять всі можливі початкові частини $\mathbf{i}_k \in \Sigma_1^\infty$ та $i_k \in \Sigma_1$ слова \mathbf{w}_k та деякі кінцеві сегменти $j_k \in \Sigma_2$ (третя умова \mathcal{H}). Тобто кожній парі (\mathbf{i}_k, i_k) ставиться у відповідність деякий j_k з алфавіту D_{i_k} , котрий визначений попереднім символом i_k . Зрозуміло, що довжини \mathbf{i}_k слів будуть в межах від 0 до $|\mathbf{i}_k|$. Позначимо довжину такого слова як $l = |\mathbf{i}_k|$. Спочатку групуємо доданки по всім можливим словам \mathbf{i}_k , а тоді – по всім i_k . Таким чином, основу степені правої сторони останньої нерівності можемо записати так

$$\sum_{\mathbf{i}_k i_k j_k \in \Sigma_3} \lambda_{\mathbf{i}_k}(I)^d \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d = \left(\sum_{l=|\mathbf{i}|=0}^{\infty} \sum_{i_k \in \Sigma_1^l} \lambda_{i_k}(I)^d \right) \left(\sum_{\substack{i_k \in \Sigma_1 \\ j_k \in D_{i_k}}} \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d \right) \quad (2.13)$$

У першому множнику (2.13) внутрішня сума береться по всіх таких словах, що мають однакову довжину l , а тоді береться зовнішня сума по всіх таких довжинах (від 0 – групі порожніх слів, до p – відповідно). Цей перший множник (2.13) є нічим іншим, як сумою спадної геометричної прогресії

$$\sum_{l=|\mathbf{i}|=0}^{\infty} \sum_{i_k \in \Sigma_1^l} \lambda_{i_k}(I)^d = 1 / \left(1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \right),$$

оскільки сума $\sum_i \lambda_i^d$ при фрактальній розмірності d на зліченній або скінченній множині всіх самоподібних стискаючих операторів з умовою OSC не перевищує 1 [77, с. 390].

Другий множник (2.13), групуючи по i , запишемо так

$$\sum_{\substack{i_k \in \Sigma_1 \\ j_k \in D_{i_k}}} \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d = \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d$$

Тому (2.13) набуде вигляду

$$\sum_{i_k, j_k \in \Sigma_3} \lambda_{i_k}(I)^d \lambda_{j_k}(I)^d = \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d \left/ \left(1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \right) \right.$$

Підставляючи останній вираз в (2.12), а (2.12) в (2.11), матимемо оцінку зверху для другого доданку (2.8)

$$H^d \left(\bigcup_{w \in \Sigma_3^p} A_w \right) \leq \text{diam}(A)^d \cdot \left(\sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d \left/ \left(1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \right) \right. \right)^p$$

Нарешті, склавши його із оцінкою (2.9), отримаємо остаточну оцінку зверху $\overline{H^d(A_p)}$

$$\begin{aligned} H^d(A_p) &\leq \overline{H^d(A_p)} = \text{diam}(A)^d \cdot \\ &\cdot \left[\left(\sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d \right)^p + \left(\sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d \left/ \left(1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \right) \right. \right)^p \right] \leq \\ &\leq \text{diam}(A)^d \cdot \left(\sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d + \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d \left/ \left(1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \right) \right. \right)^p \end{aligned}$$

Для того, щоб вона була скінченною $0 < \overline{H^d(A_p)} < \infty$ при переході $p \rightarrow \infty$ необхідно, аби виконувалась умова

$$\sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d + \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in D_i} \lambda_j(I)^d \left/ \left(1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \right) \right. = 1$$

Або, що є еквівалентно

$$\sum_{i \in \Sigma} \lambda_i(I)^d - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in \Sigma_2 \setminus D_i = C_i} \lambda_j(I)^d = 1 \quad (2.14)$$

Теорема 2. *Співвідношення (2.14) має не більше одного розв'язку відносно d .*

Доведення. Розглядаємо функцію

$$\gamma(d) = \sum_{i \in \Sigma} \lambda_i(I)^d - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d$$

Вона неперервна на $[0; \infty)$.

Розглянемо перехід $d \rightarrow \infty$. Оскільки

$$\sum_{i \in \Sigma} \lambda_i(I)^d, \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d, \sum_{j \in C_i, \forall i \in \Sigma_1} \lambda_j(I)^d \geq 0,$$

то, позначаючи $\max_i \lambda_i(I) = \lambda$, матимемо

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \gamma(d) \leq \lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{i \in \Sigma} \lambda_i(I)^d \leq \lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{i \in \Sigma} \lambda^d = \lim_{d \rightarrow \infty} |\Sigma| \cdot \lambda^d = 0.$$

Продиференціюємо (2.14) по d

$$\begin{aligned} \gamma'(d) &= \sum_{i \in \Sigma} \lambda_i(I)^d \ln \lambda_i(I) - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \ln \lambda_i(I) \cdot \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d - \\ &- \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d \ln \lambda_j(I) = \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \ln \lambda_i(I) \left(1 - \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d \right) + \\ &+ \sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d \ln \lambda_i(I) - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d \ln \lambda_j(I) \end{aligned}$$

Перший доданок – від’ємний. Розглянемо знак виразу

$$\sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d \ln \lambda_i(I) - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d \ln \lambda_j(I)$$

Залежно від множин C_i , його найбільше значення досягатиметься при $C_i \equiv \Sigma_2 \forall i$. Тому

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d \ln \lambda_i(I) - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in C_i} \lambda_j(I)^d \ln \lambda_j(I) \leq \\ &\leq \sum_{i \in \Sigma_2} \lambda_i(I)^d \ln \lambda_i(I) - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \cdot \sum_{j \in \Sigma_2} \lambda_j(I)^d \ln \lambda_j(I) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \in \Sigma_2} \lambda_j(I)^d \ln \lambda_j(I) \left(1 - \sum_{i \in \Sigma_1} \lambda_i(I)^d \right) < 0$$

Отже, $\gamma(d)$ – строго спадна.

В точці $d = 0$ $\gamma(\cdot)$ набуватиме значення $\gamma(0) = |\Sigma| - \sum_{i=1}^{n_1} |c_i|$. Бачимо, що умова $\gamma(0) \geq 1$ рівносильна:

$$\sum_{i=1}^{n_1} |c_i| + 1 \leq |\Sigma| \quad (2.15)$$

Функція $\gamma(\cdot)$, в силу монотонного спадання, прийматиме значення 1 лише в одній точці, тобто співвідношення (2.14) матиме єдиний розв'язок \square

При порушенні умови (2.15), співвідношення (2.14) не матиме розв'язку, таким чином воно є необхідною умовою. В результаті маємо оцінку розмірності $\dim_H(A)$ зверху для атрактора СІФ із самоперетинами класу \mathcal{H} , $\dim_H(A) \leq d$, де d – єдиний розв'язок (2.14). У випадку лінійності відображень f_i матимемо $\lambda_i(I) \equiv \lambda_i$. В цьому випадку співвідношення (2.14) співпадає із формулою, отриманою у [76, с. 124], з точністю до інтервалу I по якому проводиться розрахунок коефіцієнтів стиснення.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ

1. Отримано оцінку міри Хаусдорфа зверху для атрактора СІФ з нелінійними операторами без самоперетинів. Виведення оцінки представляє собою альтернативне доведення співвідношення для розрахунку самоподібної розмірності атрактора СІФ із лінійними операторами;
2. Використовуючи апарат символної динамік, отримано оцінку міри Хаусдорфа зверху для атрактора СІФ, що належить класу \mathcal{H} . На основі

цієї оцінки отримано співвідношення для оцінки розмірності Хаусдорфа зверху. Виведення оціночного співвідношення представляє собою альтернативне доведення рівності (2.14) при умові, що всі оператори в такій СІФ будуть лінійними;

3. Доведено, що рівність (2.14) має не більше одного розв'язку. Отримано необхідну умову (2.15) його існування;
4. Представлений методологічний підхід у дослідженні (в тому числі й моделюванні) динамічних систем із антиципацією, з точки зору аналізу їх граничних множин апаратом СІФ; обґрунтовано вибір такого апарату.

РОЗДІЛ 3

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СКЛАДНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ

В ході чисельного моделювання динамічних систем, оператори еволюції яких передбачають багатозначність розв'язків, так чи інакше зіштовхуються із проблемами обсягів обчислень та нелінійним ростом використання машинної пам'яті. Даний розділ присвячено особливостям чисельного дослідження динаміки дискретних ДСА [5; 6; 89]. Зокрема розглядаються питання обчислювальних складностей при моделюванні таких систем. Далі зосереджуємося на алгоритмах побудови карт динамічних режимів та старших показників Ляпунова для ДСА. Детально описуються запропоновані процедури визначення періоду циклічних траєкторій. Наприкінці наводиться порівняльний аналіз цих процедур залежно від області фазового простору ДС на якому вони застосовуються.

3.1 Математична модель

В рамках даного розділу розглядаємо математичну модель представлену (1.2). Еволюціонування системи згідно закону (1.2) розкриває одну із наріжних проблем дослідження динамічних СА – обчислювальні витрат при їх моделюванні. Дана проблема є однією із вирішальних перешкод в прикладних дослідженнях гіперінкурсивних систем із антисипацією.

3.2 Теорія алгоритмів та обчислювальні моделі

Хоча саме поняття алгоритму зараз здається досить очевидним, його формалізацію заклали досить недавно – в першій половині ХХ століття. Перш за все, цьому ми завдячуємо дисертації А. М. Тюринга, роботам А. Черча, Е.Л. Поста [90], А.М. Колмогорова, А.А. Маркова та інших [91; 92].

Практичне застосування теорії алгоритмів на сьогоднішній день не викликає жодних сумнівів, оскільки робота практично всієї техніки базується на основах цієї теорії. Саме Тюринг та Джон фон Нейман дали основний теоретичний поштовх до створення ЕОМ [93]. Зокрема, Неймана вважають засновником сучасного, прогресивного напрямку такого прикладного інструменту аналізу складних систем, як клітинні автомати [93]. Нині теорія алгоритмів охоплює значний спектр питань: починаючи від первинних, що формували її – питання обчислюваності функцій, обчислювальних моделей, складності обчислень та відношення між їх класами; й закінчуючи побудовою нових типів алгоритмів та їх класифікації – управляючі, обчислювальні тощо. З прикладної точки зору у теорії алгоритмів, передусім, стоять задачі аналізу трудомісткості алгоритмів, їх класифікація по складностям та визначення й оптимізація їхньої ресурсомісткості. Так, серед основних прикладних здобутків теорії алгоритмів є напрацювання рекомендацій по проектуванню та розробці програмних систем, що наряду із вдосконаленням апаратного забезпечення обумовлює вирішення ряду задач математичного моделювання, вирішення яких було неможливим ще до недавніх пір. Незважаючи на постійно зростаючу обчислювальну потужність машин, питання складності алгоритмів залишається актуальним й понині. Тому, саме це питання так чи інакше буде проходити крізь цей розділ як основне.

Алгоритм [94, с. 99; 95, с. 135] є приписом, що однозначно описує хід процесів. Він задає перехід від одного стану процесу в інший під дією деякого оператора «переробки» станів. Цей оператор задається скінченним набором правил. Один й той самий алгоритм може задавати різні процеси, що різнитимуться лише початковим станом. Алгоритмічний процес складається з окремих кроків наперед заданої складності. Для побудови алгоритму необхідно мати алфавіт, за допомогою якого представлені стани процесу.

Алгоритм формально можна представити функцією $f : V^* \rightarrow V^*$, що перетворює одне скінченне слово в друге з того ж алфавіту V (в якості алфавіту, зазвичай, беруть $V = \{0,1\}$). Через V^* позначатимемо множину всіх скінчених послідовностей номерів із V , тобто $V^* = \bigcup_{i \geq 0} V^i$ при всіх скінчених i , де V^i — множина всіх скінчених послідовностей з V довжиною i . Розрахунок такої функції f здійснюється на деякій обчислювальній моделі. Ця модель задається фіксованим набором правил, послідовно застосовуючи які, можна розрахувати $f(x)$ для довільного вхідного слова $x \in V^*$. Кожне правило представляє собою комбінацію базових операцій цієї моделі. До прикладу, такими операціями для Мащини Тюрінга можуть бути: прочитати символ із вхідної стрічки, прочитати символ із робочої області пам'яті, записати символ в стрічку, зупинка розрахунку чи вибір наступної операції. Окрім базових операцій в означення моделі також включена й ціна цих операцій для визначення складності даного алгоритму. Серед найпоширеніших обчислювальних моделей варто зазначити [96, с. 5]: Машина Тюрінга, Лямбда-обчислення, Регістрові машини (наприклад, RAM-машини). Зараз існує досить велика кількість різноманітних модифікацій та похідних моделей: недетерміновані машини Тюрінга, клітинні автомати [97], RAM [98, с. 24], моделі PRAM [98, с. 230] та багато інших.

3.3 Теорія складності обчислень

На множині алгоритмів вводять такі характеристики, як поняття *мір складності*, з метою порівняння алгоритмів та вибору «кращого» по заданому критерію. Ця міра складності описується кількістю *обчислювальних ресурсів*, що необхідні для виконання даного алгоритму. Основними мірами є *час виконання (часова складність)* алгоритму на даній обчислювальній моделі (його швидкість виконання) та *об'єм пам'яті (просторова*

складність), що потребує алгоритм для того, аби бути виконаним на тій же обчислювальній моделі.

Час виконання алгоритму $T(n)$ для даної обчислювальної моделі є кількість базових операцій, які будуть виконані для перетворення вхідного слова x довжини n .

Часова складність алгоритму в найгіршому випадку визначається як

$$t_{\max}(n) = \max_{|x| \leq n} t(x)$$

При обчисленні точного значення затрачених ресурсів на виконання алгоритму в ньому фігуруватимуть постійні складові – затрати на виконання базових операцій, що залежатимуть від конкретної обчислювальної моделі. Однак, із зростанням розміру вхідних даних (довжини вхідного слова x) їх вплив нівелюватиметься, разом із доданками нижчих порядків. Тому, в теорії складності обчислень розрахунок складності алгоритму проводиться *асимптотично*, тобто оцінюються затрати ресурсів (часу або пам'яті) в граничному випадку – коли розмір вхідних даних прямує у нескінченність. В асимптотичному аналізі прийняті наступні означення [96, с. 8].

Нехай деякий алгоритм має обчислювальну складність $f(n)$.

Означення. Оцінка складності алгоритму $\Theta(g(n))$ задає множину таких функцій $f(n)$, якщо існують деякі константи $c_1, c_2 > 0$ та деякий номер n_0 , $\forall n > n_0$ для яких буде виконуватись $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$. В такому випадку кажуть, що $g(n)$ є асимптотично точною оцінкою $f(n)$.

Аналогічно вводять поняття асимптотично верхньої та нижньої оцінок.

Означення. Оцінка складності алгоритму $O(g(n))$ задає множину таких функцій $f(n)$, якщо існує деяка константа $c > 0$ та деякий номер n_0 , $\forall n > n_0$ для яких буде виконуватись $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$. Кажуть, що $g(n)$ є асимптотично верхньою оцінкою $f(n)$.

Означення. Оцінка складності алгоритму $\Omega(g(n))$ задає множину таких функцій $f(n)$, якщо існує деяка константа $c > 0$ та деякий номер n_0 , $\forall n > n_0$ для яких буде виконуватись $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$. Кажуть, що $g(n)$ є асимптотично нижньою оцінкою $f(n)$.

3.4 Побудова карт показників ДС

В цьому підрозділі розглядатимемо алгоритми побудови карт динамічних режимів та старших показників Ляпунова. Для зручного узагальнення їх (та всіх інших, що будуються у просторі управляючих параметрів відповідної ДС) разом називатимемо *картами абстрактних показників*. Сконцентруємося на проблематиці пов'язаній із їх побудовою та, відповідно, їх обчислювальними складностями.

Нехай маємо справу із траєкторією дискретної ДСА x_0, x_1, x_2, \dots . Оскільки ДСА часто можна представити у вигляді явної залежності майбутніх станів від минулих через оператор Хатчинсона, то кардинальні числа $|x_i|$ в найгіршому випадку (наприклад, без утворення циклів), будуть зростати по показниковому закону

$$|x_i| = |x_0| \cdot N^i, i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

де N – кількість селекторів багатозначного оператора еволюції (1.2). Через цю особливість ДСА, при їх моделюванні питання обчислювальних складностей постає особливо гостро. В рамках цього розрахуємо обчислювальні складності складових алгоритмів побудови карт абстрактних показників ДСА. Далі на їх основі зможемо скоректувати і покращити запропоновані алгоритми з точки зору мінімізації обчислювальної складності.

Дотримуватимемося наступних необхідних позначень:

- під c_n розумітимемо обчислювальні затрати на порівняння двох чисел в R^n ;
- m_n – обчислювальні затрати на розрахунок функції, що діє в R^n . Будемо вважати, що для відповідної функції наперед розрахована таблиця значень і затрати на розрахунок цієї функції будуть зведені до отримання значення із цієї таблиці;
- p – максимальна довжина циклу, який розглядаємо;

3.4.1 Складність побудови стану ДСА

Кожен крок еволюції ДСА супроводжується побудовою чергового стану системи, а тому розглянемо обчислювальні затрати на кожній ітерації. Має місце наступна теорема.

Теорема. *Обчислювальна складність побудови кожного стану $x_i, i = 1, 2, \dots$ в найгіршому випадку буде $O(N^{2i})$.*

Доведення. Нехай стан $x_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_{|x_i|}^i\}$ збудовано на основі попереднього $x_{i-1} = \{x_1^{i-1}, x_2^{i-1}, \dots, x_{|x_{i-1}|}^{i-1}\}$. Спочатку визначимо обчислювальну складність побудови x_i на множині скінченних кардинальних чисел, як відображення $m(k)$ (тут k – потужність стану x_i), оскільки складність першочергово залежатиме не від номера ітерації, а від потужності стану. Розглядатимемо найгірший сценарій у сенсі обчислювальних затрат, для якого потужність станів зростатиме по показниковому закону $|x_i| = N |x_{i-1}|$.

Спочатку діємо першим селектором оператора $F(\cdot)$ на першу точку з x_{i-1} згідно (1.2), тобто $x_1^i = f_1(x_1^{i-1})$. Тим самим отримаємо першу точку для x_i , понісни обчислювальні затрати лише на операцію розрахунку точки в R^n , складність якої m_n . Для наступної точки $x_2^i = f_1(x_2^{i-1})$ буде проведено

операцію складності $m_n + c_n$, оскільки додатково доведеться перевірити чи належить вже x_2^i стану x_i (порівнявши її із x_1^i). Для всіх наступних точок x_j^i (отриманих по всім іншим точкам з x_{i-1} та по всім іншим селекторам) будуть проведені операції складності $m_n + (j-1) \cdot c_n$, де $j = |x_i|$. Таким чином, складність побудови стану x_i буде

$$\begin{aligned} m(k) &= m_n + (m_n + c_n) + \dots + (m_n + (k-1)c_n) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (m_n + i \cdot c_n) = k \cdot m_n + (k-1) \cdot k \cdot \frac{c_n}{2} \end{aligned}$$

Враховуючи $k(i) = |x_i| = N^i |x_0|$, переходимо до визначення складності побудови стану залежно від номеру i цього стану

$$m(i) = \frac{c_n |x_0|^2}{2} N^{2i} + \left(m_n - \frac{c_n}{2} \right) \cdot |x_0| \cdot N^i, \quad (3.2)$$

котра і буде обмеженою по відношенню до N^{2i} при $i \rightarrow \infty$. \square

Застосування мультимножин.

Як бачимо з (3.2), найбільші обчислювальні витрати $O(N^{2i})$ припадають на операції порівняння, а на обчислення відповідних точок в R^n лише $O(N^i)$. В цьому й полягає одна з найбільших проблем моделювання ДСА. Її можна частково обійти за рахунок представлення x_i як *мультимножин* (відсутні затрати на порівняння $c_n = 0$), тоді в (3.2) залишиться лише складова $O(N^i)$. Однак, в такому випадку, умова (3.1) буде мати місце завжди, незалежно від того, режим ДСА регулярний чи ні. І як наслідок – постійний ріст використання пам'яті по показниковому закону N^i .

3.4.2 Складність розрахунку метрики Хаусдорфа

Оскільки ми працюємо в метричному просторі всіх не порожніх компактних підмножин із метрикою Хаусдорфа $d_H(\cdot, \cdot)$, логічним буде наступне питання – які обчислювальні затрати на її розрахунок для двох станів $X = \{x_i\}_i$ та $Y = \{y_j\}_j$, виходячи із означення цієї метрики?

Теорема. *Обчислювальна складність розрахунку метрики Хаусдорфа буде $O(N^{i+j})$.*

Доведення. Як бачимо із означення (1.3), її розрахунок складається з двох видів операцій. Перший – обчислення $\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x - y|$ Евклідової метрики для $x, y \in R^n$. Виходячи із її означення, складність розрахунку $\rho(\cdot, \cdot)$ (котра еквівалентна c_n) можна досить просто представити через c_1 : $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \rightarrow \sqrt{nc_1^2} = c_1\sqrt{n}$, бо операції порівняння двох чисел та віднімання рівні в плані обчислювальних складностей.

Другий же вид операцій у (1.3) – порівняння двох значень $\rho(\cdot, \cdot)$, тому, згідно наших базових позначень складностей з підрозділу 3.4, вона потребуватиме c_1 затрат. Кількість розрахунків $\rho(x_i, y_j)$ по всім можливим парам (x_i, y_j) , очевидно, буде $|X| \cdot |Y|$. Підрахунок $\inf_j \rho(x_i, y_j) = \rho_{x_i}$ для кожної точки x_i потребуватиме $|Y| - 1$ операцій порівнянь $\rho(\cdot, \cdot)$, а для всіх x_i їх буде вже $(|Y| - 1) \cdot |X|$. Далі, необхідно розрахувати $\sup_i \{\rho_{x_i}\}$, на що знадобиться $|\{\rho_{x_i}\}_i| - 1 = (|Y| - 1) \cdot |X| - 1$ порівнянь. В силу комутативності метрики, загальна кількість порівнянь $\rho(\cdot, \cdot)$, що знадобиться для розрахунку $d_H(X, Y)$ становитиме $2((|Y| - 1) \cdot |X| - 1) = 2 \cdot |X| \cdot |Y| - 1$. Загальні обчислювальні затрати для отримання $d_H(x_i, x_j)$, беручи до уваги (3.1), будуть

$$d_{ij} = |X_i| \cdot |X_j| \cdot c_1 \sqrt{n} + (2 \cdot |X_i| \cdot |X_j| - 1) \cdot c_1 = c_1 (2 + \sqrt{n}) N^{i+j} |X_0|^2 - c_1 \quad (3.3a)$$

чи в O -нотації

$$d_{ij} \in O(N^{i+j}) \quad (3.3b)$$

Тим самим теорему доведено \square

При потребі розглядати любий отриманий (до сих пір чи одержаний у викладках надалі) вираз складностей тільки в однотипних операціях, проведитимемо заміну $c_n = c_1 \sqrt{n}$. У всіх викладках, де має вплив перехід станів ДСА на мультимножини, з метою досліджень цього впливу і подальшої мінімізації обчислювальних витрат, вирази будемо представляти одночасно через c_1 та c_n , аби зручно було виокремлювати складову c_n , що відповідає цьому переходу на мультимножини. Нагадаємо, що випадок мультимножин передбачає $c_n \equiv 0$.

3.4.3 Складність побудови траєкторії ДСА

Наступним кроком після побудови стану ДС є побудова їх послідовності (траєкторії). Якою ж буде складність побудови траєкторії довжиною p , яка починається із стану з індексом i ? Позначатимемо її як $M(i, i+p)$.

Теорема. Складність побудови траєкторії із X_i в X_{i+p} буде $O(N^{2i+2p})$.

Доведення. Розрахуємо її як суму складностей усіх станів цієї траєкторії.

$$\begin{aligned} M(i, i+p) &= \sum_{k=i}^{i+p} m(k) = \sum_{k=i}^{i+p} \left(\frac{c_n |X_0|^2}{2} N^{2k} + \left(m_n - \frac{c_n}{2} \right) \cdot |X_0| \cdot N^k \right) = \\ &= \frac{c_n |X_0|^2}{2} \frac{N^{2i} \cdot (N^{2(p+1)} - 1)}{N^2 - 1} + \left(m_n - \frac{c_n}{2} \right) \cdot |X_0| \cdot \frac{N^i \cdot (N^{p+1} - 1)}{N - 1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

або в O -нотації

$$M(i, i+p) \in O(N^{2i+2p}) \quad \square$$

У випадку мультимножин ($c_n = 0$)

$$M(i, i+p) \in O(N^{i+p}) \quad (3.5)$$

3.4.4 Адаптація процедури побудови карт динамічних режимів для ДСА. Її обчислювальні складності

Кarti динамічних режимів є досить зручним інструментом візуального представлення різних режимів багатопараметричних нелінійних системи та аналізу переходів між цими режимами. Загалом ці карти можна формалізувати як відображення

$$D : \Lambda \rightarrow Z_{\geq 0}, \quad \Lambda \subseteq R^{\dim(\bar{\lambda})}$$

яке кожному управляючому параметру ДС $\bar{\lambda} \in \Lambda$ ставить у відповідність деяке додатне ціле число – період циклу чи нуль, якщо такого циклу немає. Вони конструюються, як правило, по двом параметрам системи, а у випадку ж більшої корозмірності будують двовимірні перерізи простору параметрів, по яким вже й конструюють карти. Методика побудови таких карт базується на практичних критеріях існування детермінованого хаосу – сильна чутливість до вхідних даних тощо. Опис класичної процедури їх розрахунку та приклади можна знайти у роботах Кузнєцова С.П., Кузнєцова О.П., Аніщенко В.С. та багатьох ін. [99-102; 103, с.39; 104]. Розглянемо особливості їх побудови для нелінійних дискретних ДС з антиципацією [3]. Основна процедура побудови цих карт досить проста. Для кожної точки $\bar{\lambda} \in \Lambda$ запускають ітеративний процес еволюції ДС з метою виходу достатньо близько до інваріантної множини (атрактора). Ітерування продовжують до тих пір, аж поки чергова точка x_i траєкторії (при зміні t) не почне відхилятися від якоїсь найближчої попередньої точки x_{t-p} менше від заданої наперед точності ε , тобто $\left| x_t - x_{t-p} \right|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ у відповідній метриці. В такому випадку стверджують, що у відповідній точці простору управляючих

параметрів ДС має цикл період p . Цілком зрозуміло, що при тих же самих управляючих параметрах нелінійна ДС може мати кілька басейнів притягіння, котрим, в загальному випадку, можуть відповідати різні режими системи. Якщо така система містить більше однієї притягаючої множини, її називають *мультистабільною* [105; 106].

Тепер розглянемо особливості та проблеми алгоритмів побудови карт динамічних режимів для систем із випередженням. Її починаємо з обрання точки $\bar{\lambda}_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{\dim(\Lambda)}^0) \in \Lambda$ простору управляючих параметрів та процедури визначення початкового стану $x_0 = \{x_0^0\}$. При першому запуску траєкторії точку $x_0^0 \in R^n$ обирають близькою до смислового значення системи, для якої побудована відповідна антисипаційна модель. Далі її ітерують довільною композицією селекторів $f_i(\cdot) = f_{i_0}(\cdot) \circ f_{i_1}(\cdot) \circ \dots \circ f_{i_k}(\cdot)$ оператора Хатчинсона $B(\cdot)$, аби вийти на точку як завгодно близьку до інваріантної множини. Покажемо це. З означення непорушної точки багатозначного оператора $x^* \in B(x^*)$ та властивостей адресного відображення з попереднього розділу випливає, що для $\forall x_0 \in R^n$ з басейну притягіння інваріантної множини оператора B її k -й образ $(B^k(\cdot))$ можна представити об'єднанням всіх таких злічених композицій $f_i(\cdot)$ із довжинами слів $k = |i| \rightarrow \infty$ потрапить в атрактор при $k \rightarrow \infty$. Таким чином, для кожної такої композиції $f_i(\cdot)$ матимемо точку на атракторі незалежно від x_0 .

Як наслідок, для простоти процедури побудови карт показників ДСА в якості $f_i(\cdot)$ можемо обрати, без втрати цілісності, таку композицію, якій відповідає слово $i = i_0 i_1 \dots$ з номерів одного селектора. Цілком зрозуміло, — якщо відповідний селектор має період p , то $f_j(x^*) = x^*$, де $j = \overbrace{i_0 i_1 \dots i_{p-1}}^p$.

Таким чином, в силу стиснення $B(\cdot)$ та приналежності x_0 басейну притягіння, виходимо на \tilde{x}^* (як завгодно близьку до x^*) та приймаємо

$X_0 = \{\tilde{x}^*\}$. Фактичні обчислювальні витрати тут будуть залежати лише від швидкості збіжності композиції $f_1(\cdot)$ та наперед заданої точності.

Якщо ж це був не перший запуск траєкторії, то в якості X_0 обираємо усталений стан попереднього запуску траєкторії (для сусідньої точки $\bar{\lambda}$, для якої був знайдений цикл). При побудові таких карт заздалегідь обмежуємося максимальною довжиною циклу, котрий намагаємося знайти.

Розглянемо можливі процедури визначення періоду траєкторії та їх обчислювальні складності. Кожну з таких процедур можна розбити на дві складові. Перша полягає в побудові станів ДС в моменти часу $i, i+1, \dots, j$. Друга ж – у порівнянні новозбудованих станів між собою та із раніше отриманими у метриці $d_H(\cdot, \cdot)$. Обчислювальна оптимізація процедури пошуку періоду якраз полягає у комбінуванні цих складових таким чином, аби загальна складність була найменшою.

Розглянемо наступні можливі процедури.

3.4.4.1 Процедура А пошуку циклічної траєкторії. Її обчислювальні складності.

Суть її полягає в тому, що на кожному кроці побудови траєкторії ми намагаємося знайти цикл, порівнюючи останній отриманий стан ДС із попередніми у зворотному часі. Для початку обмежуємося пошуком циклу довжини p . Нехай в деякий момент часу ми знаходимося в точці x_{i-1} ДСА. Будуємо x_i за (1.2) та порівнюємо цей стан з попередніми $(i-1)$ -м, $(i-2)$ -м і так далі до $i-p$, поки не знайдемо достатньо близький (з наперед заданою точністю) стан в обраній метриці, як показано на рисунку 3.1.

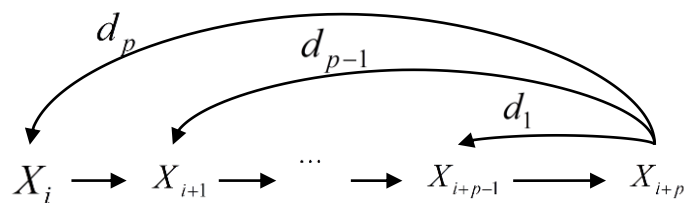


Рисунок 3.1. Порівняння станів згідно процедури А.

Саме такий напрямок порівнянь обраний, аби уникнути ситуації, коли ми спочатку знайшли кратний цикл. Таким чином, ми спершу наблизимось до «мінімального» циклу (без подвоєнь, потроєнь тощо). Так, якщо знайдено такий стан X_j з $d_H(X_i, X_j) \leq \varepsilon$, то подальші дії цілком зрозумілі. В протилежному випадку продовжуємо траєкторію на один стан вперед та повторюємо процедуру знову.

Нас цікавить наступне питання: якою буде складність дій на кожній ітерації? Нехай ми раніше збудували стан $i + k - 1$ та не знайшли цикл довжини $k - 1 < p$. Будуємо $(i + k)$ -й і порівнюємо його із усіма раніше збудованими в зворотному порядку — із $i + k - 1$, $i + k - 2$, ..., i . Це, відповідно, потребуватиме згідно (3.2) та (3.3б):

$$m(i + k) + d_{i+k, i+k-1} + d_{i+k, i+k-2} + \dots + d_{i+k, i} \in O(c_n N^{2i} + N^{2i+2k-1} + N^i).$$

Тому й вся процедура потребуватиме наступні затрати при ітеруванні із стану i в стан $i + p$, що замикатиме знайдений цикл довжини p

$$\begin{aligned} & m(i) + (m(i + 1) + d_{i, i+1}) + (m(i + 2) + d_{i, i+2} + d_{i+1, i+2}) + \dots + \\ & + (m(i + p) + d_{i, i+p} + d_{i+1, i+p} + \dots + d_{i+p-1, i+p}) = M(i, i + p) + \sum_{k=i}^{i+p-1} \sum_{j=k+1}^{i+p} d_{kj} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Розрахуємо $\sum_{k=i}^{i+p-1} \sum_{j=k+1}^{i+p} d_{kj}$. Вона представляє собою суму всіх наддіагональних елементів матриці $\{d_{kj}\}$. Сума всіх таких елементів першого рядка:

$$\begin{aligned} & c_1(2 + \sqrt{n})N^{2i+1}|X_0|^2 - c_1 + c_1(2 + \sqrt{n})N^{2i+2}|X_0|^2 - c_1 + \dots + \\ & + c_1(2 + \sqrt{n})N^{2i+p}|X_0|^2 - c_1 = c_1(2 + \sqrt{n})|X_0|^2 N^{2i+1} \frac{N^p - 1}{N - 1} - pc_1 \end{aligned}$$

Другого:

$$c_1(2 + \sqrt{n})|X_0|^2 N^{2i+3} \frac{N^{p-1} - 1}{N - 1} - (p - 1)c_1,$$

і так далі до останнього елемента над діагоналлю

$$d_{i+p-1 \ i+p} = c_1 (2 + \sqrt{n}) N^{2i+2p-1} |X_0|^2 - c_1.$$

А вся сума елементів

$$\sum_{k=i}^{i+p-1} \sum_{j=k+1}^{i+p} d_{kj} = -\frac{p+1}{2} pc_1 + c_1 (2 + \sqrt{n}) |X_0|^2 \frac{N^{2i+1} (N^{2p+1} - N^{p+1} - N^p + 1)}{(N-1)(N^2-1)} \quad (3.7)$$

тобто

$$\sum_{k=i}^{i+p-1} \sum_{j=k+1}^{i+p} d_{kj} \in O(N^{2i+2p-1}).$$

Беручи (3.4) та (3.7) до уваги, вираз (3.6) набуде вид

$$\begin{aligned} & \frac{c_n |X_0|^2}{2} \frac{N^{2i} \cdot (N^{2(p+1)} - 1)}{N^2 - 1} + \left(m_n - \frac{c_n}{2} \right) \cdot |X_0| \cdot \frac{N^i \cdot (N^{p+1} - 1)}{N - 1} - \frac{p+1}{2} pc_1 + \\ & + c_1 (2 + \sqrt{n}) |X_0|^2 \frac{N^{2i+1} (N^{2p+1} - N^{p+1} - N^p + 1)}{(N-1)(N^2-1)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отже, вся процедура $\in O(c_n N^{2i+2p} + N^{2i+2p-1})$

Теорема. *Просторові обчислювальні витрати процедури А становлять $O(N^{i+p})$.*

Доведення. На протязі всієї процедури необхідно постійно тримати в пам'яті останні $p+1$ стани $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}$ ДС. Відповідно, потребуватиме

$$\sum_{j=i}^{i+p} |x_j| = |x_0| \cdot N^i \cdot \frac{N^{p+1} - 1}{N - 1}$$

чисел із R^n та додатково одне число, що відповідає найменшій відстані між цими станами. Й тому, необхідно тримати в пам'яті (просторова складність)

$$|x_0| \cdot N^i \cdot \frac{N^{p+1} - 1}{N - 1} + \left\lceil \frac{1}{n} \right\rceil$$

чисел із R^n або в O -нотації $O(N^{i+p})$ □

3.4.4.2 Процедура В пошуку циклічної траєкторії. Її обчислювальні складності

З (3.8) неважко показати, що у випадку, коли в якості станів ДС обрані мультимножини ($c_n = 0$), складова (3.7) по обчисленню метрик $d_H(\cdot, \cdot)$ в процедурі пошуку періодичної траєкторії перебирає на себе більшу частину обчислювальних ресурсів (порівняно із затратами на побудову самих станів). В такому випадку, для оцінки $M(i, i+p)$ матиме місце (3.5), а (3.7) залишиться незмінним. Тому, наступна альтернативна процедура покликана мінімізувати обчислення в (3.7). З метою простоти опису даної процедури розглянемо деякі спрощення та локальні позначення. Нехай ε – наперед задана точність пошуку періодичної траєкторії. Маємо D – область визначення ДС, що є об'єднанням граничної множини (цикл періоду не більшого за p) та басейну її притягіння. Початковий стан ДС $x_{i-1} \in D$. Починаємо будувати траєкторію з першої серії ітерацій $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}$ (її індекс $s = 0$). Наперед задається довжина цих серій рівна p . Відстань між такими серіями (позначатимемо тут як t) $t \geq 1$ визначається емпірично та залежить від особливостей динаміки системи (чим швидше траєкторія наближається до граничної множини, тим меншим обираємо t). Таке розбиття процесу ітерування на стани в серіях та поза ними обумовлене тим, що операції порівняння станів будуть застосовуватися лише до тих з них, котрі у серіях. У такий спосіб скорочуючи обчислювальні витрати. Структуру траєкторії по процедурі представлено на рис. 3.2.

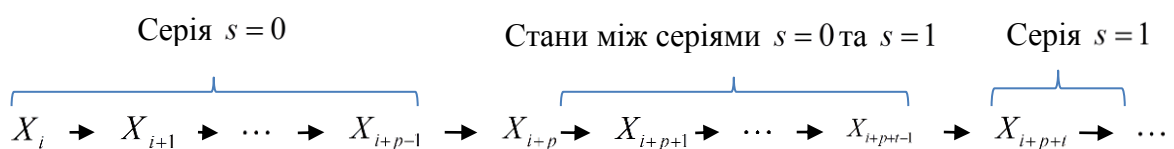


Рисунок 3.2. Структура траєкторії згідно процедури В.

Таким чином, матимемо серії, що починаються з $i + s(p + t)$ та закінчуються в $i + s(p + t) + p - 1$, при їх номерах $s = 0, 1, \dots$, а тому й складність побудови цих частин траєкторії буде

$$M(i + s(p + t), i + s(p + t) + p - 1) \text{ для } s = 0, 1, \dots$$

Між серіями будуть лише затрати на побудову траєкторій

$$M(i + s(p + t) - t, i + s(p + t) - 1) \text{ при } s = 1, 2, \dots$$

Для кожної серії необхідно буде понести додаткові затрати на порівняння її станів із першим станом, що слідує за цією серією (для серії $s = 0$ цей стан є X_{i+p} з рис. 3.2). Отже, будемо X_{i+p} . Розраховуємо відхилення між станами поточної серії та X_{i+p}

$$\bar{d}^{(s)} = (d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_p^{(s)}), \text{ де } d_j^{(s)} = d_H(X_{i+p+s(p+t)}, X_{i+p+s(p+t)-j})$$

згідно підходу, проілюстрованому на рис. 3.1, для кожної серії – рисунок 3.3.

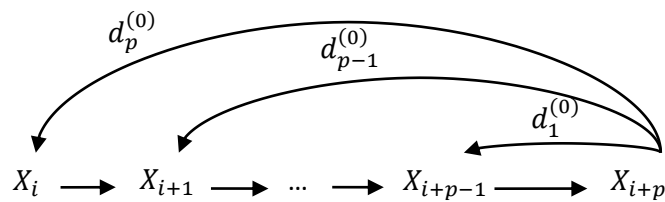


Рисунок 3.3. Порівняння станів серії $s = 0$ із станом X_{i+p} поза нею згідно процедури **В**.

Тут d_i без верхнього індексу позначають відстані між станами у випадку, коли немає розбиття на серії. В такому випадку витрати для $s = 0$ будуть

$$\sum_{j=1}^p d_{i+p, i+p-j}^{(0)}, \text{ а для всіх } s = 0, 1, \dots:$$

$$\sum_{j=1}^p d_{i+s(p+t)+p, i+s(p+t)+p-j}^{(s)}$$

Всю процедуру схематично представлено на рис.3.4. Між станами X_{i+p} та X_{i+p+t} немає витрат (3.3а) на розрахунок метрики – лише побудова траєкторії (3.4).

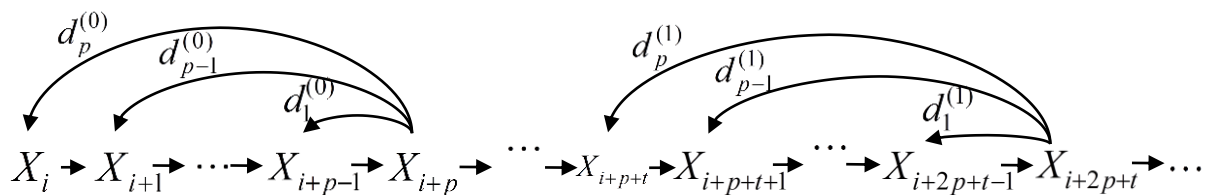


Рисунок 3.4. Розрахунки згідно процедури В.

У випадку, коли знайдено таке $d_k^{(s)} \leq \varepsilon$ (зрозуміло, що затрати на порівняння значень метрик тут – pc_1), то процедуру пошуку циклу завершено й вважаємо, що ДС для поточного управляючого параметру має період k . Якщо таких

$$d_{k_1}^{(s)}, d_{k_2}^{(s)}, \dots \leq \varepsilon \quad (3.9)$$

кілька, то обираємо той з них, який має найменший індекс $\min_i (k_i)$, аби заздалегідь уникнути кратних циклів та сфокусуватися на «мінімальному». Обчислювальні затрати порівняння всіх $d_k^{(s)}$ із ε рівні pc_1 та пошуку найменшого з них – $(p-1)c_1$, а у цілому:

$$pc_1 + (p-1)c_1 = (2p-1)c_1$$

Й нарешті, третій варіант – таке $d_k^{(s)} \leq \varepsilon$ не знайдено, то інкрементуємо $s \leftarrow s+1$ та здійснюємо наступну серію ітерацій. Такі серії $s = 0, 1, \dots$

проводимо до тих пір, поки $m^{(s)} = \min(d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_p^{(s)})$ спадає і перевищує ε . Підсумовуємо затрати цієї процедури

$$M(i, i + s(p + t) + p - 1) + m(i + s(p + t) + p) + \\ + \sum_{k=0}^s \sum_{j=1}^p d_{i+k(p+t)+p, i+k(p+t)+p-j}^{(k)} + (2p-1)c_1$$

Якщо стоїть задача – переконатися, що ми наблизились до орбіти періоду саме k_1 , то розглядаємо $m^{(s)} = d_{k_1}^{(s)} \leq \varepsilon$. В такому випадку необхідно проводити оцінку компонентів вектора

$$\overline{\Delta}_{k_1}^{(s+1)} = \begin{vmatrix} d_1^{(s+1)} \\ d_2^{(s+1)} \\ \vdots \\ d_{k_1}^{(s+1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_1^{(s)} \\ d_2^{(s)} \\ \vdots \\ d_{k_1}^{(s)} \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Тепер ми здійснюватимемо серії ітерувань довжиною k_1 . У випадку k_1 -періодичної орбіти необхідно, аби виконувалася умова

$$\overline{\Delta}_{k_1}^{(s+1)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0.$$

При порушенні цієї умови слід обрати наступного кандидата $k_2 \neq k_1$ із співвідношення (3.9), відмінного від усіх попередньо розглянутих із набору $\min(d_1^{(s+1)}, d_2^{(s+1)}, \dots, d_p^{(s+1)}) \leq \varepsilon$. Якщо таких не залишилося, то ми маємо справу або із орбітою періоду більшого за p , або ми потрапили в область квазіперіодичності чи хаосу. Такий підхід дає можливість більш точно визначити – маємо ми справу із орбітою саме такого періоду чи перед нами більш складна структура.

Перед тим як будувати ланцюг станів перед наступною серією, необхідно визначити його довжину. Для більшої гнучкості процедури, з метою мінімізації кількості побудов станів системи, довжина цих ланцюгів

буде змінюватись від серії до серії ітерувань, тобто $t = t(s)$. Для кожної серії довжину ланцюга станів якраз і визначатимемо на основі швидкості спадання (3.10)

$$t(s+1) \sim \left\lceil \frac{1}{\left\| \overline{\Delta}_k^{(s+1)} - \overline{\Delta}_k^{(s)} \right\|} \right\rceil$$

Теорема. *Просторові обчислювальні витрати процедури В становлять $O(N^{i+p})$.*

Доведення. Витрати пам'яті в ході проведення процедури близькі до витрат процедури А, окрім останніх $p+1$ станів ДС – в пам'яті необхідно тримати $2p$ чисел для розрахунку (3.10). Тому, просторова складність рівна

$$\left| X_0 \right| \cdot N^i \cdot \frac{N^{p+1} - 1}{N - 1} + \left\lceil \frac{2p}{n} \right\rceil$$

чисел в R^n або в O -нотації $O(N^{i+p})$ \square

Для розглянутих процедур у випадку, коли у процесі ітерування траєкторія переривається (множина дійсних значень стану порожня), то збудуємо x_{i-1} і починаючи з нього, знову застосовуємо обрану процедуру пошуку періодичної орбіти.

Визначивши характер динаміки для $\overline{\lambda}_0$, рухаємося в просторі параметрів далі – здійснюємо пошук періоду орбіт для $\overline{\lambda}_1$ і т.д. При такій побудові карти можуть різнитися залежно від обрання початкового стану та напрямку руху в просторі параметрів. Це пояснюється можливою наявністю мультистабільності системи. Розпочавши рух траєкторії із збуреного стану x'_{i-1} , ми можемо потрапити в інший атрактор, що, ймовірно, матиме зовсім іншу структуру.

3.4.4.3 Порівняння обчислювальних складностей процедур пошуку циклічних траєкторій.

Зосередимося на питанні порівняння обчислювальних процедур з точки зору мінімізації обчислювальних витрат. Порівняння здійснюватимемо залежно від динаміки у просторі управляючих параметрів. Нехай стоїть задача, що потребує визначення періоду циклічних траєкторій ДС. Наприклад, необхідно побудувати карту динамічних режимів у даній області управляючих параметрів. Наперед обмежимося максимальним значення періоду траєкторії p . Це означатиме, що всі траєкторії періоду більшого за p розглядатимемо як квазіперіодичні чи хаотичні. Дане припущення зумовлено об'єктивними обмеженнями обчислювальних засобів. Задамося наперед визначеною точністю розрахунків ε .

Розглянемо наступні випадки. Ми знаходимося в деякий момент часу i в стані x_i . В першому випадку припустимо, що ми все ще відносно «далеко» від циклу (від його ε -околу). Тут під мірою близькості мається на увазі кількість ітерацій системи, а їх кількість значно перевищувала б p . Поки ε -окіл далеко, проводити операції розрахунку відстані між станами ДСА не доцільно, беручи до уваги необхідну для них кількість обчислень (3.3б). Тому, в даному випадку варто наближатися до атрактора виключно побудовою станів без складової по розрахунку відстані між ними. Саме це й передбачено процедурою **В**.

В другому випадку ми вже знаходимося в ε -околі циклічної орбіти. Тут необхідно мінімізувати кількість побудови станів, залишаючи операції порівнянь відстані між ними для визначення періоду. Цей сценарій відповідає процедурі **А**.

Враховуючи той факт, що процедура **В** представляє собою узагальнення процедури **А**, то у зазначених вище випадках доцільно використовувати тільки процедуру **В**. Тим самим, знаходячись далеко від атрактора, варто рухатись серіями ітерувань, а як тільки досягли його ε -околу

– кладаємо $t(s) \equiv 0$ та в поточній серії проводимо лише операції порівняння відстані між станами.

Порівняємо виграш (в термінах кількості обчислень) від представлення станів ДСА мультимножинами для процедур **A** та **B**. Схематично зображено на рис. 3.5 а) порівняння процедур **A** та **B** у випадку без мультимножинного представлення, а на б) – із мультимножинним для обох процедур.

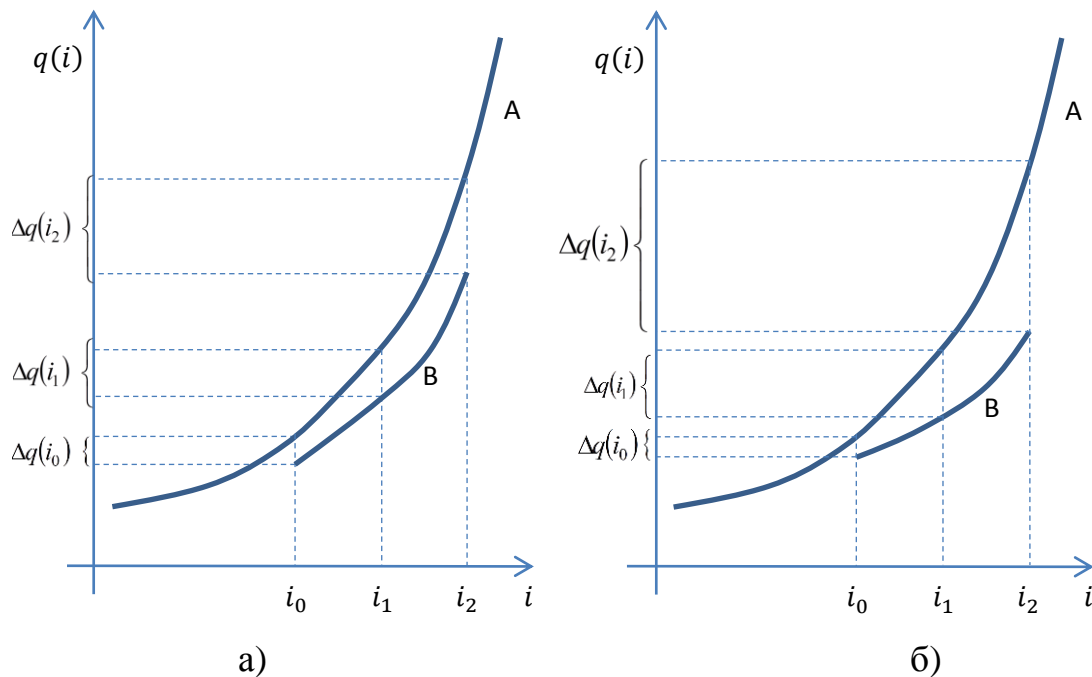


Рисунок 3.5. Схематичне порівняння обчислювальних витрат а) без мультимножинного представлення станів ДСА та б) із мультимножинним представленням. По осі абсцис – номер ітерації i , ординат – часові обчислювальні витрати $q(i)$ на дану ітерацію.

Розглянемо спочатку рисунок а). Крива складності **A** відповідної процедури **A** в кожний момент часу визначається, як сума $m(i)$ із (3.2) та $\sum_{j=i-1}^{i-p} d_{ji}$ із (3.3б). Нехай, починаючи із i_0 до i_2 , застосовуємо процедуру **B**, тобто лише будуємо послідовно стани системи, тим самим, понісши тільки витрати (3.2). Очевидно, різниця Δ_{AB} між ними в кожний момент часу, де вони відхиляються (для $i = i_0 \dots i_2$), та при $|X_0| = 1$ (для простоти), становитиме

$$\Delta_{AB}(i) = \sum_{j=i-1}^{i-p} d_{ji} = c_1(2 + \sqrt{n})N^{2i-p-1}(N^p - 1) - c_1p \in O(N^{2i})$$

При цьому відношення витрат

$$\frac{m(i) + \sum_{j=i-1}^{i-p} d_{ji}}{m(i)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1 + 2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \frac{N^p - 1}{N^{p+1}}$$

І як бачимо, при великих ітераціях витрати процедур пропорційні. Навіть перехід на мультимножини не матиме ефекту.

Розглянемо тепер випадок із представленням станів ДСА мультимножинами (рис. 3.5 б)). Підставивши $c_n = 0$ у (3.2) та врахувавши Δ_{AB} , знайдемо відношення витрат на кожному кроці

$$\frac{m(i) + \sum_{j=i-1}^{i-p} d_{ji}}{m(i)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1 + \frac{c_1(2 + \sqrt{n})}{m_n} \frac{N^p - 1}{N^{p+1}} N^i \in O(N^i)$$

що є вже суттєвим результатом, порівняно із попереднім відношенням, особливо, враховуючи порядок відхилення Δ_{AB} між процедурами.

3.5 Розрахунок показників Ляпунова

Показники Ляпунова (ПЛ) є важливою характеристикою динамічних систем, кількісним описом збіжності чи розбіжності близьких траєкторій, на основі якої роблять висновок про її режим еволюції – регулярний чи системі властива хаотичність, як сильна чутливість до малих збурень. Тому, для аналізу динаміки системи (в тому числі з антисипацією) доцільно мати не лише процедуру їх розрахунку, а й максимально зосереджуватись на питанні її обчислювальної оптимальності – мінімізації обчислювальних затрат при її проведенні.

Як добре відомо, за мультиплікативною ергодичною теоремою Оселедця кількість таких показників буде рівною розмірності фазового простору ДС (n). Розглянемо дискретну систему

$$x_{t+1} = f(x_t), x_t \in R^n, f \in C^1,$$

n -вимірну гіперсферу малого радіуса ε з центром у початковій точці x_0 та ансамбль ДС із початковими точками в цій гіперсфері радіусу ε

$$x_0 + \tilde{x}_0, \quad \|\tilde{x}_0\| = \varepsilon$$

при збуреннях \tilde{x}_0 у різних напрямках. В ході еволюціонування цього ансамблю гіперсфера деформуватиметься у n -вимірний еліпсоїд (допоки ця множина зображуваних точок залишається достатньо малою). Деформування (стиснення, розтягнення) цього гіпереліпсоїда відбувається по n напрямкам його головних півосей [65, с. 210]. Розмір цих півосей змінюється по експоненціальному закону $\exp(\mu_i t)$, $i = \overline{1, n}$ при достатньо малих розмірах множини зображуваних точок, аби зберігалось лінійне наближення траєкторій. Нехай «основна» траєкторія $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$ — одна із ансамблю, утворена збуренням початкового стану x_0 : $x_0 + \tilde{x}_0 \rightarrow f(x_0 + \tilde{x}_0) \rightarrow \dots$, та ε — достатньо мале, щоб розглядати f лінійним наближенням, то представивши f рядом Тейлора $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x)$ в околі x_0 , знайдемо відхилення між цими двома траєкторіями на першому кроці

$$\|f(x_0) - f(x_0 + \tilde{x}_0)\| \cong \|\tilde{x}_0 f'(x_0)\| \quad (3.11)$$

Добре відомо, з тієї ж теореми Оселедця, що для кожного \tilde{x}_0 існує *показник (Ляпунова)*

$$\mu(\tilde{x}_0) = \overline{\lim_{t \rightarrow +\infty}} \frac{1}{t} \ln(\|\tilde{x}_t\|/\|\tilde{x}_0\|), \quad (3.12)$$

де $\|\tilde{x}_t\|$ — відхилення дотичне до траєкторії в момент t . За (3.11) відхилення на першому кроці буде $\|\tilde{x}_1\| \cong \|\tilde{x}_0 f'(x_0)\|$. Залежно від обраного початкового збурення, μ приймає одне з μ_i $i = \overline{1, n}$ значень.

Існує ряд методів розрахунку ПЛ: Бенеттіна, Вольфа, Розенштайна, Кантца, Якобі та ін. [107]. Більшість із них використовує процедури ортонормування (наприклад, Грамма-Шмідта) для розрахунку всього спектру показників. Для того, аби дати відповідь на питання чи системі властива хаотичність – достатньо знати знак старшого ПЛ, котрий домінує над рештою. Далі в роботі розглядатимемо процедуру розрахунку старшого ПЛ та її адаптацію до систем із антисипацією. В основі запропонованої процедури для систем із антисипацією, що розглядається далі, лежить ідея алгоритму Бенеттіна [108] для розрахунку старшого ПЛ. З практичної точки зору розрахунок по (3.12) представляє собою задачу із серйозними обчислювальними проблемами, бо при малих збуреннях та великих t можна легко вийти за межі машинної сітки. Тим більш, в контексті тематики даної роботи, для систем у яких оператор еволюції заданий багатозначним відображенням, прямий розрахунок за (3.12) стає просто неможливим в силу колосального обсягу обчислень. Тому, Бенеттіном була запропонована наступна обчислювальна процедура. Замість $t \rightarrow \infty$ розглядається велика серія малих кроків однакової довжини, а на кожному кроці $k = \overline{1, T}$ розраховується показник відхилення траєкторій $\mu_k = \ln \left(\frac{\|\tilde{x}_k\|}{\|\tilde{x}_0\|} \right)$, а тоді ПЛ розраховується як середнє по всіх крокам

$$\mu = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \mu_k = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \ln \left(\frac{\|\tilde{x}_k\|}{\|\tilde{x}_0\|} \right)$$

Важливо, що Бенеттіном в тій же роботі були доведені існування границі при $T \rightarrow \infty$ та її незалежність від \tilde{x}_0 .

3.5.1 Адаптація процедури розрахунку старшого показника Ляпунова для ДС із антисипацією

Тепер, застосуємо цей підхід до систем із антисипацією.

Під максимальним показником Ляпунова (надалі просто показником Ляпунова) для ДСА розумітимемо наступне:

Означення. При початковому збуренні $\|\tilde{x}_0\|$ траєкторії у Хаусдорфовому метричному просторі показник

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\|\tilde{x}_0\| \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{d_H(X_n, X'_n)}{\|\tilde{x}_0\|},$$

називатимемо показником Ляпунова для ДСА. Тут $d_H(X_n, X'_n)$ – відхилення між основною та збуреною траєкторіями в момент часу n .

Насамперед необхідно вибрати початкову точку. Оскільки показники Ляпунова з фізичної точки зору представляють степінь розходження (зближення) траєкторій, то зручно розглядати на кожному кроці алгоритму відстань між двома траєкторіями, одна з яких лежить в аттракторі (або максимально до нього наближена). З міркувань мінімізації обчислень, починати процедуру будемо із станів потужності 1 системи (1.2). Для побудови цих станів вибираємо початкову точку $y \in R^n$ близькою до смислового значення системи, для якої побудована відповідна антисипаційна модель, та будуємо довільну послідовність номерів i_0, i_1, \dots, i_k селекторів системи (1.2). При $k \rightarrow \infty$, образ x_0 точки y композиції $f_{i_0}(\cdot) \circ f_{i_1}(\cdot) \circ \dots \circ f_{i_k}(\cdot)$ належатиме аттрактору системи (1.2) (підрозділ 2.1, теорема 1), очевидно, якщо ітерування розпочато із басейну притягіння. Цю точку $x_0 = \{x_0\}$ і візьмемо за початок однієї із двох траєкторій, що розглядатимемо вході нашого алгоритму, адаптованого для розрахунку старшого ПЛ для систем із антисипацією. Початок другої ж траєкторії буде ε -збуренням $x'_0 = x_0 + \tilde{x}_0$, де $\tilde{x}_0 \equiv \varepsilon$. Перші кілька кроків процедури зображено на рис.3.6.

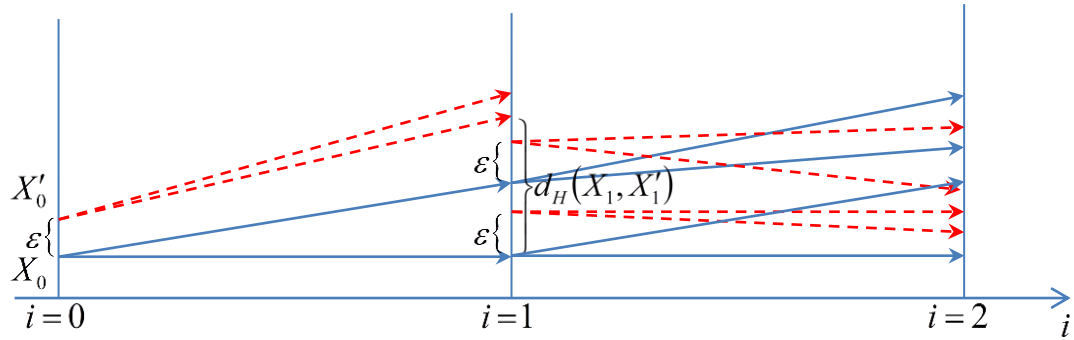


Рисунок 3.6. Ілюстрація процедури розрахунку старшого ПЛ в моменти часу $i = 0, 2$ для систем із антисипацією. Суцільною лінією позначена траєкторія, що лежить в аттракторі, пунктирною – збурена.

Будуємо першу ітерацію ($i = 1$): $X_0 \xrightarrow{F} X_1$, а точка $X_0 + \varepsilon \xrightarrow{F} X'_1$. Відхилення між образами складає $d_H(X_1, X'_1)$. Тобто n -вимірна гіперсфера розтягнулась (стиснулась) у відношенні $\frac{d_H(X_1, X'_1)}{\|\tilde{x}_0\|}$, а тому перше наближення старшого ПЛ буде $\ln \frac{d_H(X_1, X'_1)}{\|\tilde{x}_0\|}$. Проводимо другу ітерацію $i = 2$: траєкторію, що лежить в аттракторі, ітеруємо далі по (1.2) $X_1 \xrightarrow{F} X_2$, а другу траєкторію починаємо із збуреного стану $X_1 + \varepsilon$, що переходить під дією (1.2) у X'_2 . Аналогічно попередньому кроку розраховуємо друге випробування для старшого ПЛ: $\frac{d_H(X_2, X'_2)}{\|\tilde{x}_0\|}$, та друге його наближення – усереднення

$$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{d_H(X_1, X'_1)}{\|\tilde{x}_0\|} + \ln \frac{d_H(X_2, X'_2)}{\|\tilde{x}_0\|} \right).$$

Останнє варто розраховувати один раз у кінці. Однак, на протязі всього t пам'ять, необхідна для збереження цих значень, буде рости лінійно. Процедуру продовжуємо достатньо велику кількість разів, аби отримати

максимально точне значення ПЛ. З обчислювальної точки зору варто зазначити, що хоча $\|\tilde{x}_0\|$ є постійним значенням, його включаємо в розрахунок випробувань ПЛ на кожному кроці, аби уникнути, знову ж таки, виходу обчислень $\ln(d_H(\cdot, \cdot))$ за межі машинної сітки при над малих $d_H(\cdot, \cdot)$.

3.5.2 Обчислювальні складності процедури розрахунку старшого ПЛ

Має місце наступна теорема.

Теорема. *Просторові та часові обчислювальні витрати процедури розрахунку СПЛ становлять $O(N^i)$ та $O(N^{2i})$ від номеру ітерації відповідно.*

Доведення. Складність побудови «основної» траєкторії від стану x_1 до x_k буде $M(1, k)$. Побудова збуреної траєкторії, з точки зору обчислювальних витрат, на кожному кроці не переривалася, оскільки потужність її стану на кожному кроці співпадає із потужністю основної траєкторії, а тому витрати на побудову обох будуть $2M(1, k)$. На кожному кроці, починаючи із $i = 1$, розраховуємо відстань між образами основного x_i та збуреного станів x'_i (що згідно (3.3a) становить d_{ii} обчислювальних витрат), підраховуємо значення логарифму із витратою m_1 . Після проведення останньої ітерації усереднюємо всі отримані наближення значень старшого ПЛ ціною $(k - 1)c_1$. Таким чином, загальні витрати на процедуру становитимуть:

$$2M(1, k) + \sum_{i=1}^k d_{ii} + km_1 + (k - 1)c_1 \quad (3.13)$$

Згідно (3.4) перший доданок в (3.13) буде

$$c_n |X_0|^2 \frac{N^2 \cdot (N^{2k} - 1)}{N^2 - 1} + (2m_n - c_n) \cdot |X_0| \cdot \frac{N \cdot (N^k - 1)}{N - 1},$$

чи в O -нотації $O(c_n N^{2k} + N^k)$.

Тобто складність $O(N^{2k})$, а у випадку мультимножини ($c_n = 0$) буде $O(N^k)$ (детальний опис застосування мультимножин описано у пункті 3.4.1). Беручи до уваги (3.3а), другий доданок в (3.13) буде:

$$\sum_{i=1}^k ((d_n + 2c_1)N^{2i}|X_0|^2 - c_1) = (d_n + 2c_1)N^2|X_0|^2(1 + N^2 + N^4 + \dots + N^{2(k-1)}) - kc_1 = c_1(2 + \sqrt{n})|X_0|^2 N^2 \frac{N^{2k} - 1}{N^2 - 1} - kc_1$$

або в O -нотації $O(N^{2k})$.

Бачимо, що, незалежно від того, знаходимося ми у просторі мультимножин чи ні, сумарна складність процедури по (3.13) складатиме $O(N^{2k})$ часових витрат. Причому, значна їх частина припадає саме на операції розрахунку відстані між станами основної траєкторії на атракторі та збуреної.

Оцінимо тепер просторову складність. На кожному кроці i процедури максимально необхідно тримати в пам'яті два стани ДС (x_i та x'_i), що буде $(|x_i| + |x'_i|)$ й множину наближених значень старшого ПЛ розміром i чисел із R . Тому, враховуючи (3.1), отримаємо просторову складність

$$2|x_0| \cdot N^i + \left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil$$

чисел в R^n або в O -нотації $O(N^i)$ \square

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ

1. Узагальнено методи побудови карт динамічних режимів та старших показників Ляпунова для систем із антиципацією через адаптацію відповідних процедур на Хаусдорфових простір;

2. представлені процедури розрахунку періоду циклічних траєкторій та розрахунку старшого ПЛ для ДСА у Хаусдорфовому метричному просторі, отримані їх обчислювальні складності;
3. запропоновано та обґрунтовано представлення станів ДСА мультимножинами для пониження обчислювальних затрат в ході пошуку циклічних траєкторій;
4. наведено порівняння запропонованих процедур залежно від структури фазового простору (розподілу періодичних режимів) із доведенням мінімізації обчислювальних витрат.

РОЗДІЛ 4

КОМП'ЮТЕРНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ІЗ АНТИСИПАЦІЄЮ

Обчислювальна техніка, що останні десятиліття бурхливо розвивається, відкрила шлях не лише чисельному дослідженню нових математичних моделей, яке раніше не представлялося можливим із-за значних обчислювальних витрат, а й запропонувала зручний та широкий клас інструментів по представленню отриманих результатів (в тому числі й у візуальному).

Для більш оптимального розв'язання ресурсномістких прикладних задач наряду із нарощенням обчислювальних потужностей, доцільно розробляти паралельні алгоритми обчислень, розроблені для відповідної обчислювальної архітектури. Варто відзначити вітчизняні здобутки у побудові таких надшвидкісних комп'ютерних комплексів, як кластери інституту ім. Глушкова та НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», що входять до переліку найпотужніших обчислювальних центрів України. Витоки розбудови вітчизняної високопродуктивної обчислювальної техніки беруть початок з робіт академіка С.О. Лебедева та його учнів. Сама обчислювальна платформа таких великих центрів представлена програмним забезпеченням середнього рівня GRID-системою, що пов'язує ряд інститутів і відомств [109]. Так, на базі інституту кібернетики створено високоефективний обчислювальний комплекс СКІТ (суперкомп'ютери для інформаційних технологій), що дає змогу розв'язувати принципово нові задачі із ресурсномісткими обчисленнями у космічній, економічній, технічній та інших сферах [110]. Запуск перших високоефективних обчислювальних систем СКІТ-1 та СКІТ-2 із серії СКІТ відбувся відносно недавно – в 2004–2005 роках. По своїм характеристикам вони мало чим поступаються світовим аналогам. В 2008 році було введено в експлуатацію СКІТ-3, що став головною складовою суперкомп'ютерного обчислювального центру НАН України. Ця подія без применшення відкриває можливості в області розробки

принципово нових інструментів дослідження надскладних систем, що раніше не представлялося можливим.

За допомогою програмних комплексів, розроблених спеціально під такі архітектури, стає можливим моделювання та дослідження таких складних явищ, як ураганів, прогнозування землетрусів та їх поведінки, інші стихійні та екологічні загрози (роботи Куssуль Н.Н., Шелестов А.Ю., Скакун С.В., Скопечкий В.В., Булавацький В.М. та ін. [111]). Розподілені паралельні обчислення дали поштовх до розвитку ряду нових моделей в області біоінформатики [112, с. 121].

Із розвитком технічної бази і стрімким зростанням обсягів розробки програмного забезпечення для надпотужних комп'ютерних комплексів, з метою оптимізації їх сумісного функціонування, постає складна задача по створенню відповідних інтелектуальних програмних засобів. Згідно [113] (та посилань в ній), під інтелектуальних програмним забезпеченням мається на увазі комплекс прикладних програм, що в предметній області будує машинну модель та досліджує її властивості із умовою наближених початкових даних. А вже на основі даного аналізу розв'язуються наступні складові підзадачі: розраховується необхідна архітектура для обчислень (кількість процесорів, структура їх поєднання тощо), забезпечується розпаралелювання алгоритму розв'язання поставленої задачі, проводиться оцінка (контроль) отриманих машинних розв'язків і як фінальний крок – візуальне представлення розв'язку в предметній області.

Крім того, ускладнюється і задача оцінки достовірності отриманих комп'ютерних розв'язків. Зокрема, в роботах [113-116] описані основні принципи створення інтелектуальних програмних засобів на системах багатопоточних команд та даних (MIMD [117, с.36]), проблеми розробки паралельних алгоритмів та їх критерії якості. Створення такого роду обчислювальних алгоритмів неодмінно повинна супроводжуватися оцінкою отриманих машинних розв'язків. Очевидно, що прикладні математичні моделі містять похибки початкових даних. Вплив початкових даних, навіть

для простих прикладів, може призвести до цілком різних результатів [113], а дослідження впливу точності початкових даних є однією із принципових задач теорій стійкості та хаосу. Дослідження динамічних систем нерозривно пов'язане із виділенням областей різних режимів еволюціонування (хаотичним, регулярним, квазіперіодичним тощо) та з'ясування особливостей переходу одних в інші (зокрема сценарії переходу до хаосу).

Цей розділ присвячено такому важливому аспекту аналізу динаміки систем із антисипації, як чисельний аналіз та розробка відповідних програмних засобів дослідження таких нелінійних систем із використанням апарату багатопоточних обчислень. В рамках даної задачі зосереджуємося, зокрема, на питаннях побудови архітектури обчислень набору важливих показників динаміки систем та візуального представлення результатів. Серед таких показників динаміки СА зосереджуємося на: періодах циклічних траєкторій (для карт динамічних режимів), старшого показника Ляпунова, фрактальних та інформаційних розмірностей станів ДСА. На запропонованій та розробленій в цьому розділі обчислювальній архітектурі будемо застосовувати узагальнені на ДСА методи, детально описані у попередньому розділі.

Задачі моделювання процесів, що описуються антисипаційними законами (чи законами із випередженням), що постають при дослідженні реальних (чи наближених до реальних) явищ, часто зводяться до виду явної залежності майбутнього від минулого із використанням багатозначних операторів (про що йшлося в попередніх розділах). Їх моделювання значно складніше за моделювання ДС, які задаються однозначними операторами еволюції (згідно результатів розділу 3). Серед класичних моделей, в які необхідно включати антисипативну складову, аби вони більш точно наближалися до модельованих ними процесів, варто згадати наступні: «ресурс-споживач», безіммунне поширення епідемій [118], колективна рефлексія та індивідуальна й соціальна свідомість [119-121], моделювання транспортних потоків [17; 122; 123] та багато інших.

Як зазначалося вище, необхідною складовою побудови інтелектуальних програмних засобів виступає їх візуалізація, що значно спрощувала б розуміння проблематики та допомагала б більш точно інтерпретувати отримані результати та класифікувати й систематизувати рішення тих чи інших задач. З метою подальшої оптимізації розробки інтелектуальних програмних засобів, в її склад необхідно включати крок по інтерпретації отриманих машинних розв'язків. Для систем, що описуються багатозначними операторами еволюції, питання візуального представлення постає особливо гостро. Серед вітчизняних здобутків в області візуального представлення слід відзначити праці Верейкіної [124].

Наприклад, в максимально наближених до реальності моделях «жертви-хижака» антисипативна складова вкрай важлива, бо дотримання біологічного балансу співіснування популяцій, яке рефлексивно відображається (передчувається, антисипується) популяцією, є невід'ємною умовою. Такий підхід, очевидно, можна перенести по аналогії і на різноманітні економічні та соціальні моделі конкуренції (чи то боротьба за ресурси, чи рух натовпу при наявності різних типів обмежень). Окрім створення нових моделей, можна вдосконалювати (уточнювати) існуючі, наближаючи їх до реальних процесів чи явищ. Попри широке застосування підходів із «випередженням» у моделюванні і дослідженні багатьох явищ, все ще залишається нерозкритим ряд питань. Серед них: дослідження умов та сценаріїв зміни типів поведінки в системах із антисипацією; розробка інструментарію, за допомогою якого зручно було б аналізувати СА.

Отже, даний розділ присвячено розробці програмних засобів аналізу ДСА, особливостям комп'ютерного моделювання та візуалізації їх динаміки, як інструменту у дослідженні складних систем [3; 125; 126].

4.1 Архітектура побудови карт абстрактних показників на основі СКІТ

Відомо, що необхідною умовою виникнення хаотичної поведінки, тобто сильної залежності від початкових даних, є нелінійність. Задача по моделюванню нелінійної ДС, як складова у дослідженні її динаміки, виступає у ролі задачі із заданими наближеними початковими даними. Так, в основу дослідження та розв'язання цієї прикладної задачі, котра описується в загальному вигляді багатозначними операторами, згідно [113] можна покласти наступні етапи:

- створення та дослідження дискретної математичної моделі ДС, що описує деякий антисипаційний (із випередженням) процес чи явище;
- створення та теоретичне обґрунтування комп'ютерних методів дослідження моделі із урахування архітектури обчислювальної системи;
- розробка комп'ютерних алгоритмів розв'язання, що оцінювали б достовірність отриманих результатів.

Вирішення нашої задачі передбачає реалізацію принципу скритого паралелізму [114], тобто абстрагування від архітектури системи (зокрема багатопоточності) і включає: розпаралелювання обчислювальних алгоритмів, синхронізацію обміну даних між обчислювальними вузлами, представлення вихідної інформації в зручному для користувача форматі (для подальшого аналізу).

Зосередимося на розв'язанні задачі по побудові карти абстрактних показників (на наборі параметрів) заданої ДС, оператор еволюції якої задається багатозначним відображенням. Основа запропонованої архітектури була розроблена під розв'язання задачі по дослідженню динаміки математичної моделі, заданої (1.2).

На рис.4.1 представлено узагальнену схему розрахунку карти заданого набору показників ДС з антисипацією. В якості цих абстрактних показників у просторі управляючих параметрів ДС можуть використовуватися: періоди

циклічних траєкторій (для карт динамічних режимів), показники Ляпунова, спектри узагальнених розмірностей Рені тощо. Така схема дає можливість абстрагуватися від конкретного виду карти показників в процесі її побудови.

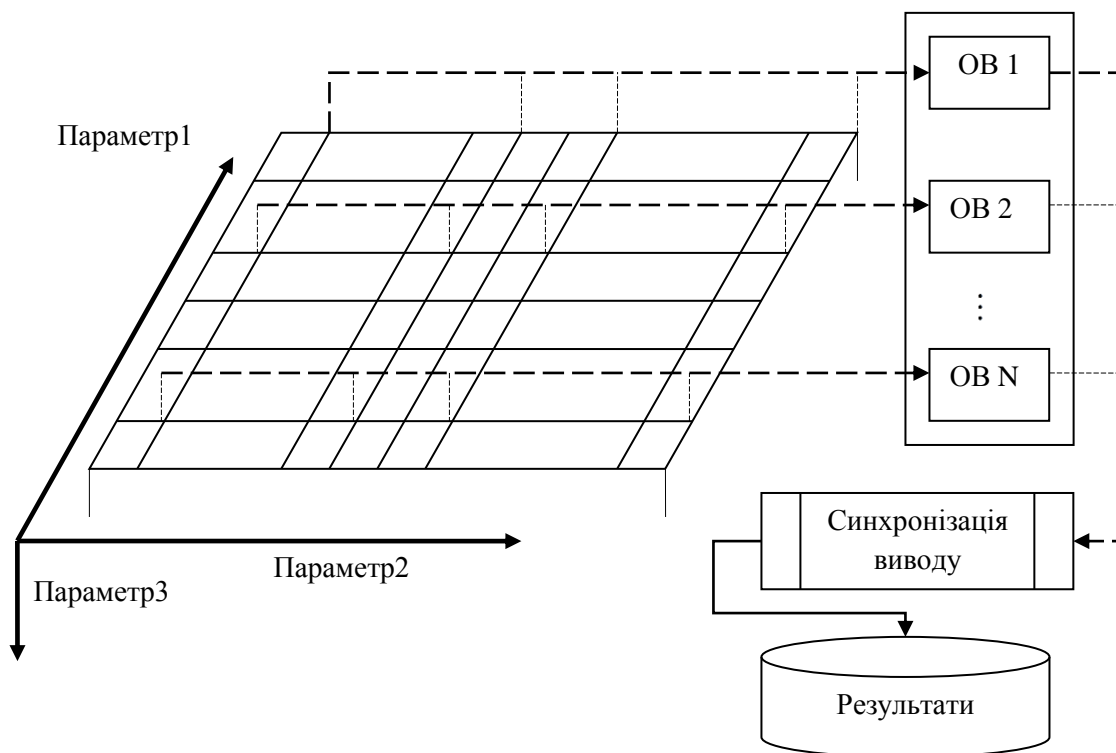


Рисунок 4.1. Узагальнена схема обчислень карти абстрактних показників.

Позначено: «ОВ» – обчислювальний вузол; «Параметр» – управляючий параметр ДС, по якому проводиться розрахунок карти.

Початковий простір параметрів системи (на практиці двовимірний) розділяємо на $N \times M$ блоків, де N – кількість наданих обчислювальних вузлів, M – кількість потоків, що будуть виконуватися на одному ОВ (не менше за кількість ядер на даному ОВ). Питання щодо визначення M вирішують, як правило, виходячи із попередньої оцінки простору параметрів. Якщо передбачається, що область простору параметрів, що посилається на ОВ, не має різких переходів режимів (хаотичний – періодичний), то M вибирають близьким до кількості ядер ОВ (з метою рівномірного їх завантаження та без зайвих витрат на планування роботи потоків – переключення тощо). У випадку насиченості різноманітними областями

динамік, M варто вибрати помітно більшим за кількість ядер, оскільки дійсні траєкторії ДС в деяких областях можуть перериватися, закінчуючи тим самим дослідження даної частини простору параметрів, а частина ядер ОВ при цьому буде простоювати. Тут варто наголосити на важливості технічної задачі оптимального розрахунку навантажень на обчислювальні вузли.

4.2 Приклади розв'язання задач для ДСА

Даний підрозділ присвячено кільком прикладам розв'язання на системі СКІТ задач по побудові карт абстрактних показників квадратичної ДС із сильною антисипацією першого порядку, що задається співвідношенням (1.4). Таке рівняння було вибрано з наступних міркувань. При $\alpha \rightarrow 0$ матимемо справу із добре відомим логістичним рівнянням із сценарієм переходу до хаосу через подвоєння періодів [64]. А сама антисипаційна складова $\alpha \cdot x_n^2$ вибрана найпростішим нелінійним компонентом, тим самим, обумовлюючи нетривіальну (нелінійну) поведінку.

В якості карт абстрактних показників у розділі наведено наступні:

- карти динамічних режимів;
- карта старшого показника Ляпунова;
- карти інформаційних та фрактальних розмірностей станів ДСА;

Всі розрахунки, проводилися на базі кластерів інституту кібернетики ім. Глушкова (архітектури СКІТ) та Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського». Розробка комп'ютерних алгоритмів проводилася засобами кросплатформенної мови програмування Java.

4.2.1 Приклад побудови карт динамічних режимів ДСА

Алгоритм знаходження періоду циклічної траєкторії, що є основною складовою процедури побудови карт динамічних режимів, описаний в попередньому розділі. В даному пункті наведемо результати чисельних експериментів побудови цих карт та їх технічні особливості. Так, на рис. 4.2

представлена така карта для відображення (1.4) в просторі двох управляючих параметрів $(\lambda; \alpha)$.

Такий спосіб представлення динаміки є досить простим в розумінні, дуже зручним та універсальним. Інтерпретувати результати таких карт нескладно – кожній парі $(\lambda; \alpha)$ в просторі управляючих параметрів системи ставиться у відповідність деякий колір. Кожний колір відповідає наперед заданому числу – періоду циклічної траєкторії, що була знайдена для цієї динамічної системи при відповідних значеннях пари $(\lambda; \alpha)$. Так, на рис. 4.2 наступними кольорами позначено області періодичної динаміки та відповідні періоди траєкторій: синій – 1, червоний – 2, жовтий – 3, зелений – 4, темно-сірий – 5, чорний – 6, світло-сірий – 7, блакитний – 8.

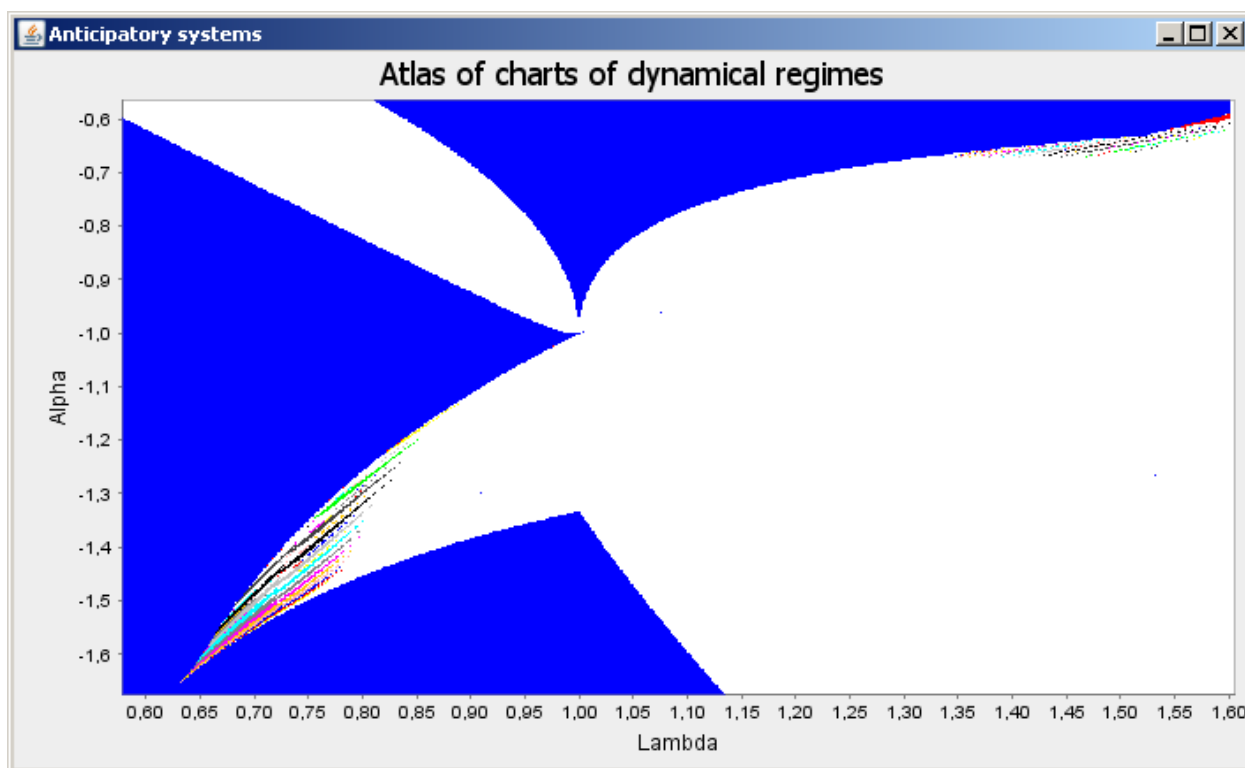


Рисунок 4.2. Карта динамічних режимів для ДС із сильною антиципацією (1.4) в просторі управляючих параметрів $(\lambda; \alpha)$

Вузькі полоси бірюзового, фіолетово та ін. кольорів відповідають більшим періодам 9–16. Білим кольором позначено області, для яких не вдалося знайти періодичні траєкторії. Серед них можуть бути області із

хаотичним чи квазіперіодичним режимами динаміки, або області, де не знайдено дійсних траєкторій.

При побудові даної карти обмежувались наступними показниками:

- максимальна довжина циклу 16;
- максимальна довжина траєкторії, що будувалася за багатозначним оператором еволюції рівна 22, що при двох селекторах багатозначного відображення ($N = 2$) дає максимальну потужність стану ДСА 2^{22} ;
- точність розрахунків $5 \cdot 10^{-10}$;
- максимальна довжина траєкторії по одному із селекторів для отримання початкового стану ДСА складає 2000 ітеруваль;
- кількість кроків по параметру λ становить 3000;
- кількість кроків по параметру α – 1000;
- максимальна кількість потоків, в яких проводились розрахунки – 16;

Загальний час розрахунку даної карти на кластері СКІТ 3 інституту ім. Глушкова при даних обмеженнях складає порядку 12 днів. Цілком зрозуміло, що час буде залежати від обраної області значень $(\lambda; \alpha)$.

Звернемо увагу на кілька областей даної карти. Перша область – $\lambda \geq 1.35$ та $\alpha \geq -0.7$. Вона цікава тим, що при $\alpha \rightarrow 0$ матимемо справу із класичним сценарієм переходу до хаосу через подвоєння періодів у логістичному рівнянні (так званий сценарій Фейгенбаума [64]). Тут спостерігаємо початок чергувань областей періодичної поведінки, представленої різними кольорами (червоним – періоду 2, зеленим – 4 тощо). Друга ж область: $\lambda \in (0.6; 0.9)$ та $\alpha \in (-1.7; -1.1)$. В ній спостерігаємо також чергування областей різної періодичності. Враховуючи можливу гіперінкурсивність системи в цій області параметрів, динаміка СА представлятиме великий теоретичний та прикладний інтерес, оскільки може розкривати нові сценарії переходу між її режимами.

Розглянемо деякі технічні аспекти побудови таких карт. На стороні серверної частини розробленого програмного додатку на деякий

обчислювальний вузол (рис.4.1) подається чергова пара параметрів $(\lambda; \alpha)$. В результаті алгоритмічних розрахунків, результатом є деяке число (знайдений період траєкторії, розпочатої із визначеного наперед початкового стану ДСА) або його відсутність (якщо циклічну траєкторію не вдалося знайти з наперед заданою точністю).

Задачею блоку «Синхронізація виводу» є запис чергової обробленої пари параметрів $(\lambda; \alpha)$ у сховище, котре відповідає знайденому періоду (заздалегідь створюючи нове таке сховище, якщо раніше не було знайдено такого періоду ДС). Очевидно, що різні обчислювальні вузли, як правило, в результаті розрахунків можуть отримувати ті самі періоди для різних пар параметрів $(\lambda; \alpha)$. Тому, цілком зрозуміло, що такий запис результатів у сховища повинен здійснюватися із дотриманням синхронізації, оскільки архітектура багатопоточна і необхідно уникати конфліктів при доступі до одного і того ж сховища різними обчислювальними потоками.

Модуль візуалізації результатів заздалегідь обмежується наперед заданим користувачем діапазоном періодів, які він намагається візуалізувати (тим самим – кількістю сховищ для зчитування). Далі він починає зчитування з серверної частини додатку всі такі сховища, задає кожному з них відповідний колір та прорисовує на стороні клієнта програмного додатку всі ці області.

4.2.2 Приклад побудови карти старшого показника Ляпунова для ДСА

На рис. 4.3 представлено результат розв'язання прикладної задачі по розрахунку старшого ПЛ для ДС із антисипацією (1.4). Відтінками сірого кольору позначено області стійкої поведінки ($\mu < 0$). Чим темніше колір, тим «сильніше» зближення траєкторій. Областям білого кольору відповідає $\mu = 0$ (або, якщо ДС не має дійсних станів при відповідних управляючих параметрах). Відтінками червоного позначено степінь розходження траєкторій (чим темніший червоний колір, тим більша степінь розходження).

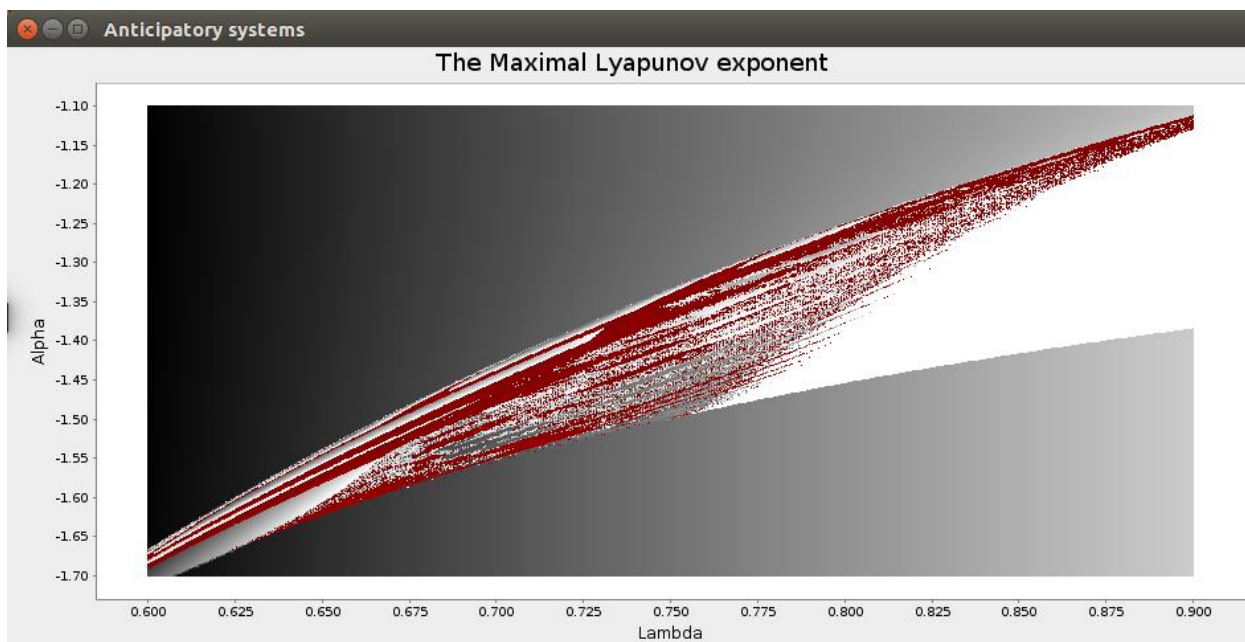


Рисунок 4.3. Карта старшого ПЛ для співвідношення (1.4) в просторі управляючих параметрів $(\lambda; \alpha)$

Були використані наступні обмеження показників:

- максимальна довжина траєкторії, що будувалася за багатозначним оператором еволюції рівна 18, що при двох селекторах ($N = 2$) дає максимальну потужність стану ДСА 2^{18} ;
- точність розрахунків $5 \cdot 10^{-10}$;
- максимальна довжина траєкторії по одному із селекторів для отримання початкового стану ДСА складає 2000 ітерувань;
- кількість кроків по параметру λ становить 1200;
- кількість кроків по параметру α – 800;
- максимальна кількість потоків, в яких проводились розрахунки – 16;

Загальний час побудови даної карти на кластері СКІТ 3 інституту ім. Глушкова при даних обмеженнях складає порядку 4 днів. І знову ж таки, час буде залежати від обраної області значень $(\lambda; \alpha)$.

Запропонована процедура розрахунку старшого ПЛ детально описана в пункт 3.5.1. Обчислювальна архітектура представлена на рис.4.1 та аналогічна тій, що описана в 4.2.1 для побудови карти динамічних режимів,

за невеликою відмінністю – структурою сховища результатів. Для кожної пари $(\lambda; \alpha)$ здійснюється процедура розрахунку старшого ПЛ μ . Результат – розрахована трійка значень $(\lambda; \alpha; \mu)$. Усі такі трійки зберігаються в єдине сховище. А вже на стороні клієнта здійснюється їх зчитування та прорисовка областей стійкості/нестійкості, представляючи значення старшого ПЛ μ відтінками відповідного кольору.

Зрозуміло, що розпочавши траєкторії із стійкої граничної множини ДС при достатньо малому \tilde{x}_0 еволюція зміни відхилень між траєкторіями визначатиметься старшим показником Ляпунова μ . Для більшої точності розрахунку μ варто змінювати \tilde{x}_0 і знову провести цю процедуру, усереднивши μ вже по реалізаціям процедури. Зрештою, трійка $(\lambda; \alpha; \mu)$ подається на «блок синхронізації» та починається процедура обчислення ПЛ вже для наступної точки $(\lambda; \alpha)$ і т. д.

Важливо помітити, що області стійкої та нестійкої динаміки на рис. 4.3 чергуються, «вкладаючись» одна в іншу, тим самим демонструючи складні сценарії переходу між режимами ДСА.

4.2.3 Побудова карт узагальнених розмірностей Рені для ДСА.

Через складність внутрішньої будови атракторів ДСА та для повноти інтерпретації результатів, отриманих за допомогою карт динамічних режимів та старшого ПЛ, доцільно розглядати додатково такий сучасний та досить потужний інструмент, як карти узагальнених розмірностей Рені (на прикладі двох найпростіших та найпоширеніших розмірностей – фрактальної D_0 та інформаційної D_1).

Дослідження саме хаотичності поведінки ДС є складною, прикладною задачею в теорії аналізу систем, що має неоціненну роль, зокрема, в інформатиці й кібернетиці. Поняття хаотичності невід’ємно пов’язане із поняттями невизначеності, випадковості, складності, нестійкості. Дослідження його властивостей бере початок у роботах Пуанкаре,

Колмогорова, Арнольда, Мозера [127, с. 78] (це відкриття гомоклінічних структур у роботах Пуанкаре та теорема Колмогорова-Арнольда про збереження інваріантних торів). Актуальність вивчення систем, яким властива хаотична поведінка, обумовлена з одної сторони значною їх поширеністю (броунівський рух, геологічні процеси тощо), а з другої – результати їх дослідження породжують не лише нові моделі та методи, а й теорії та уявлення про побудову складніших об'єктів та систем (дифузний хаос, фрактальний аналіз тощо), а відтак – розвитку нового інструментарію та методології для дослідження раніше недосліджених чи малодосліджених систем.

А тому, закономірно постає задача кількісного опису властивості хаосу – міри невизначеності досліджуваної системи. В теорії інформатики кажуть – кількості інформації, необхідної для визначення стану системи. Тут відіграє принципову роль поняття *ентропії* Колмогорова [128, с. 115; 129, с. 212], яку інтерпретують як міру незнання про систему. Чим більше необхідно мати інформації для визначення стану системи (за означенням), тим більша ентропія такої системи. Її інформаційний зміст описує пропорційність швидкості зменшення інформації про стан динамічної системи із плином часу.

Розглянемо дискретну ДСА, що діє у фазовому просторі R . Розіб'ємо його на відрізки розміром ε . Нехай спочатку маємо скінченну траєкторію цієї системи X_0, X_1, \dots, X_n . Позначатимемо через p_{i_0} ймовірність того, що стан X_0 потрапив у відрізок із номером i_0 , p_{i_k} – ймовірність, що X_k знаходиться у i_k -тому. Тому ймовірність розподілу траєкторії по відрізкам із відповідними індексами $i_0 i_1 \dots i_n$ буде $p_{i_0 i_1 \dots i_n}$. Згідно Шеннона [129, с. 212], міра інформації, необхідної для визначення стану системи, буде задаватися так

$$K_n = - \sum_{i_0 i_1 \dots i_n} p_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot \ln p_{i_0 i_1 \dots i_n}$$

Продовжуючи траєкторію на один крок X_{n+1} , ця міра буде відповідно

$$K_{n+1} = - \sum_{i_0 i_1 \dots i_{n+1}} p_{i_0 i_1 \dots i_{n+1}} \cdot \ln p_{i_0 i_1 \dots i_{n+1}}$$

Розглядається середня зміна цієї міри за весь час (від $t = 0$ до $t = n$),

$$\frac{1}{n \varepsilon} \sum_{m=0}^{n-1} (K_{m+1} - K_m) = \frac{1}{n \varepsilon} (K_n - K_0) = \frac{1}{n \varepsilon} K_n.$$

При одночасному переході $\varepsilon \rightarrow 0$ та $n \rightarrow \infty$ матимемо визначення ентропії для дискретної ДС

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \varepsilon} K_n = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \varepsilon} \sum_{i_0 i_1 \dots i_n} p_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot \ln p_{i_0 i_1 \dots i_n} \quad (4.2)$$

На основі ε наближення ентропії (4.2) визначають інформаційну розмірність D_1 цільової множини [128, с. 120] (в нашому випадку це атрактор ДСА):

$$D_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} K(\varepsilon), \quad K(\varepsilon) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \varepsilon} \sum_{i_0 i_1 \dots i_n} p_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot \ln p_{i_0 i_1 \dots i_n}.$$

Вона належить спектру узагальнених розмірностей Рені [65, с.191].

На рис. 4.4 представлена карта інформаційних розмірностей для (1.4). Цілком очевидно, що розмірності атракторів приймають значення у відрізку $[0; 1]$, оскільки система одновимірна. Білому кольору відповідає нульове значення розмірності, чорному – 1, а проміжним значенням – пропорційно відтінки сірого кольору.

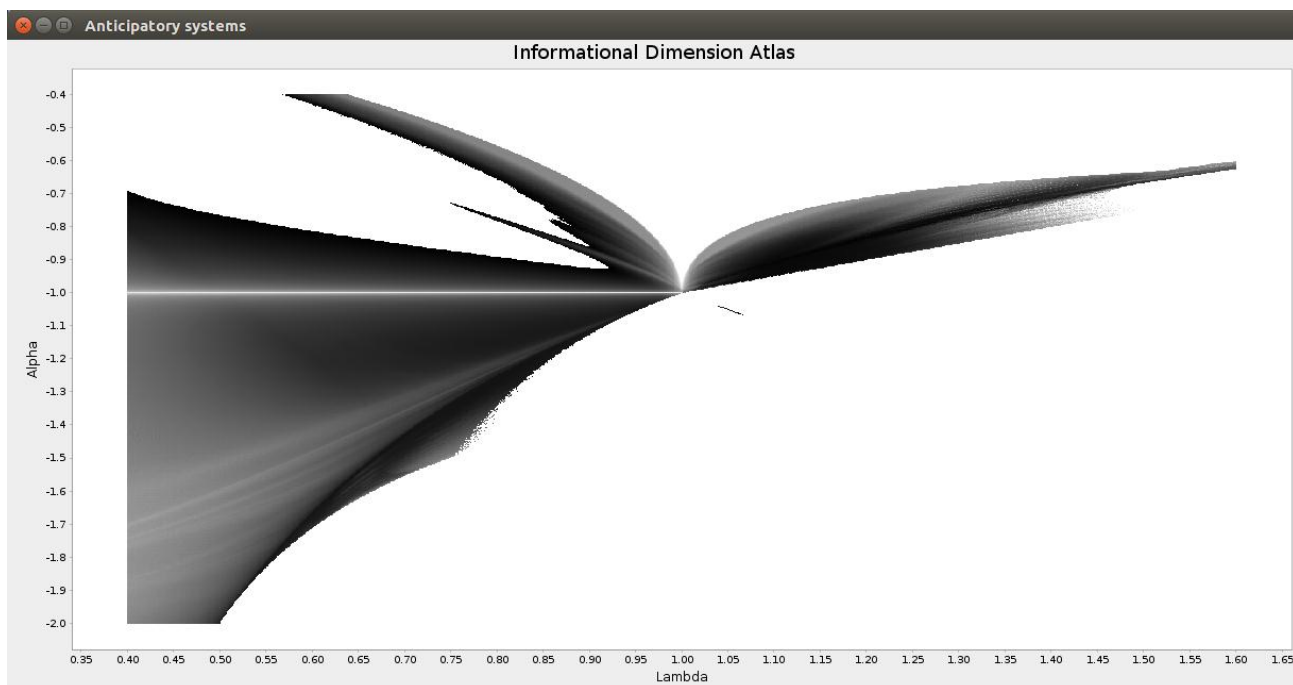


Рисунок 4.4. Карта інформаційних розмірностей атракторів ДС (1.4) із в просторі управляючих параметрів $(\lambda; \alpha)$

Обчислювальна архітектура аналогічна тій, що описана для побудови попередніх карт за наступним винятком. Для кожного такого набору управляючих параметрів $(\lambda; \alpha)$ системи проводиться процедура розрахунку одразу всього обраного набору розмірностей Рені $(D_0; D_1)$. Блок «Синхронізація виводу» в даному випадку записує в єдине сховище всі отримані трійки (заздалегідь створивши його). Ці кортежі зберігаються в специфічній структурі даних типу «ключ-значення», де в якості «ключа» виступає пара $(\lambda; \alpha)$, а «значення» – набір розмірностей $(D_0; D_1)$. Знову ж таки, по причинах багатопоточності, запис одержаних результатів має бути синхронізованим.

На стороні клієнта програмного додатку, модуль візуалізації обмежується деяким діапазоном управляючих параметрів $(\lambda; \alpha)$ для прорисовки. Далі посилає запит на сторону сервера із цим діапазоном та типом розмірності. В якості результату отримує відфільтровані трійки

$(\lambda; \alpha; d)$, де d – бажана розмірність. Далі відбувається, власне, рендерінг, лінійно конвертуючи розмірність у відтінок сірого кольору.

При побудові карти були використані наступні обмеження:

- максимальна довжина траєкторії, що будувалася за багатозначним оператором еволюції, рівна 23, що при двох селекторах ($N = 2$) дає максимальну потужність стану ДСА 2^{23} ;
- точність розрахунків $5 \cdot 10^{-10}$;
- максимальна довжина траєкторії по одному із селекторів для отримання початкового стану ДСА складає 2000 ітеруваль;
- кількість кроків по параметру λ становить 3000;
- кількість кроків по параметру α – 3000;
- максимальна кількість потоків, в яких проводились розрахунки – 16;

Загальний час побудови даної карти для вказаної області $(\lambda; \alpha)$ на кластері СКІТ 3 інституту ім. Глушкова при даних обмеженнях складає порядку 2 годин.

При тих самих обмеженнях на рис. 4.5 представлено карту фрактальних розмірностей

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln (N(\varepsilon))}{\ln \varepsilon}$$

атракторів ДСА за класичним означенням – через покриття однаковими кулями радіусу ε в кількості $N(\varepsilon)$.

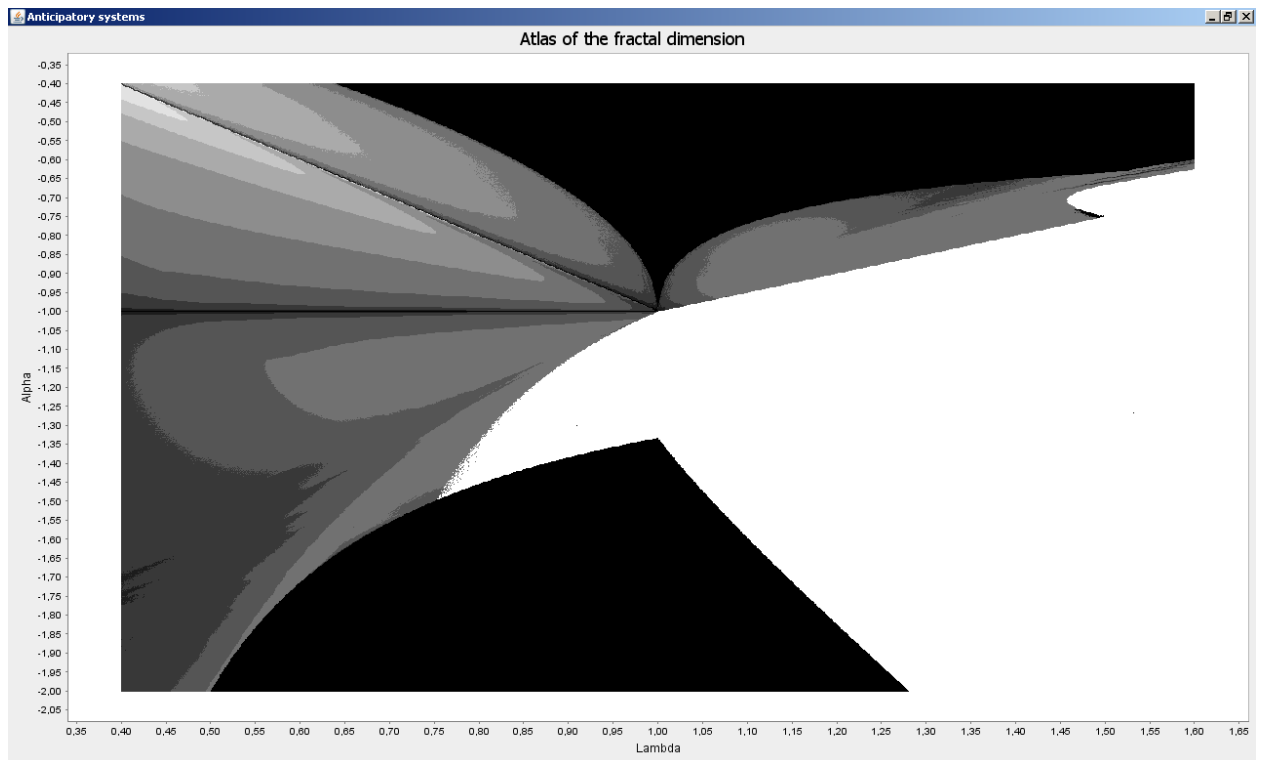


Рисунок 4.5. Карта фрактальних розмірностей атракторів ДС (1.4) в просторі управляючих параметрів $(\lambda; \alpha)$

Суцільні білі області свідчать про те, що на відповідній множині пар $(\lambda; \alpha)$ існують регулярні атрактори чи траєкторії цієї дискретної ДС «перериваються» або йдуть на нескінченність.

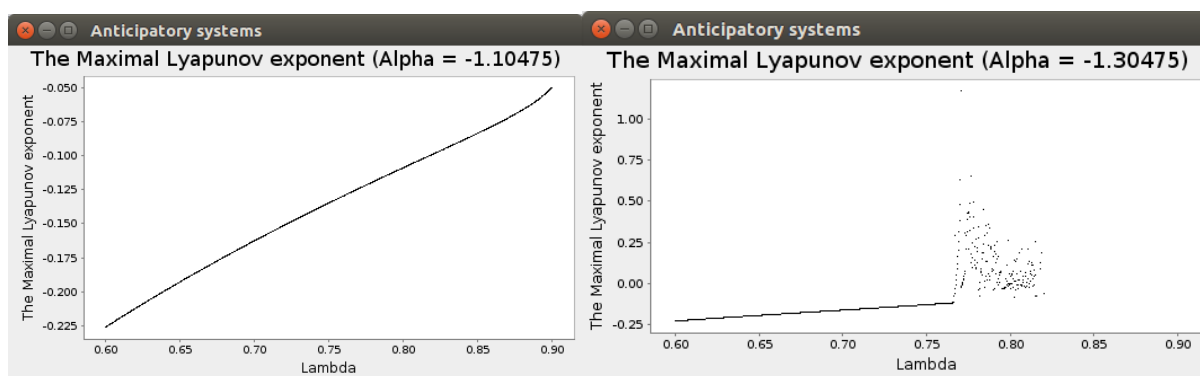
Комбінування карт різних показників при аналізі ДС із антисипацією дає повнішу картину про динаміку системи. Поєднуючи всі вище зазначені карти, можна отримати уяву про таку досить корисну характеристику, яка в деякій мірі відображає швидкість наближення траєкторії до періодичної. До прикладу, з рис. 4.2, 4.3 та 4.4 (4.5) для двох пар управляючих параметрів $(0.6; -1.15)$ та $(0.6; -1.05)$ можемо зробити висновок, що система для них має стійку періодичну динаміку (періоду 1), але наближається до непорушної точки більш «розрідженими» кроками при першій парі, оскільки фрактальна розмірність менша.

4.3 Результати чисельного моделювання переходу між різними режимами ДСА

В цьому підрозділ наведено візуальне представлення (рис. 4.6) обчислювальних експериментів розрахунку старших показників Ляпунова для ДС із антисипацією у перетині площини управляючих параметрів прямими $\alpha = \text{const}$. В якості прикладу, розглядається ДСА (1.4). Розрахунки проводилися по запропонованій адаптованій процедурі обчислення старших ПЛ, алгоритм якої детально описаний у пункті 3.5.1.

Як добре відомо із теорії динамічних систем, практичним критерієм існування хаосу в динамічній системі є наявність в спектрі показників Ляпунова хоча б одного додатного, що свідчить про розходження близьких траєкторій.

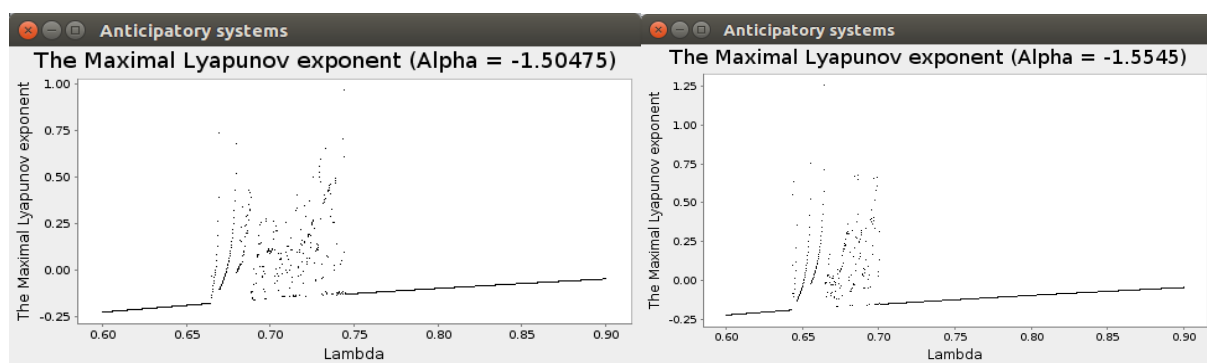
З рис. 4.6.а видно, що динаміка системи не проявляє хаотичності, оскільки старший ПЛ не перевищує 0. До того ж він плавно зростає із зростанням λ . Із рис. 4.6.б видно, що в антисипаційній системі область регулярної поведінки переходить в іншу область регулярної поведінки із зміною ПЛ стрибками. Тут бачимо три таких переходи.



а)

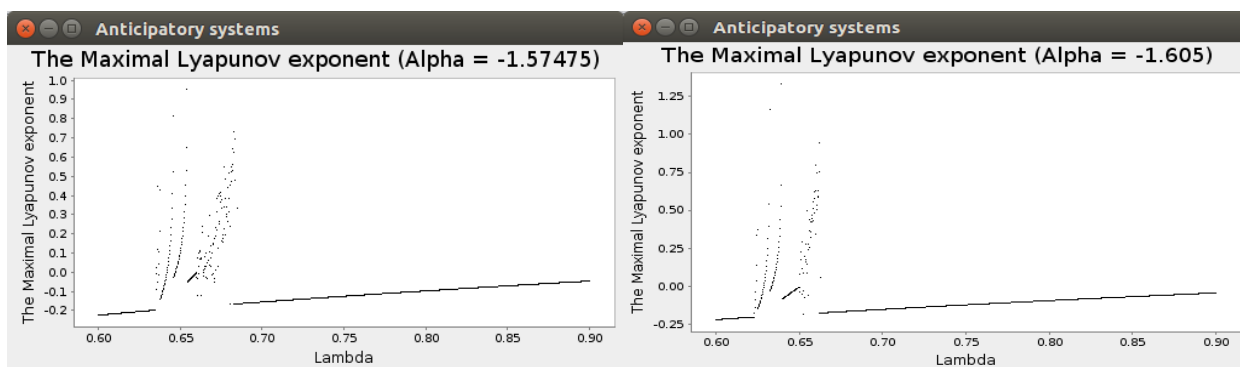
б)

Рисунок 4.6. Залежність старших ПЛ від параметра λ динамічної системи при різних значеннях α . а) $\alpha = -1.10475$; б) $\alpha = -1.30475$;



в)

г)



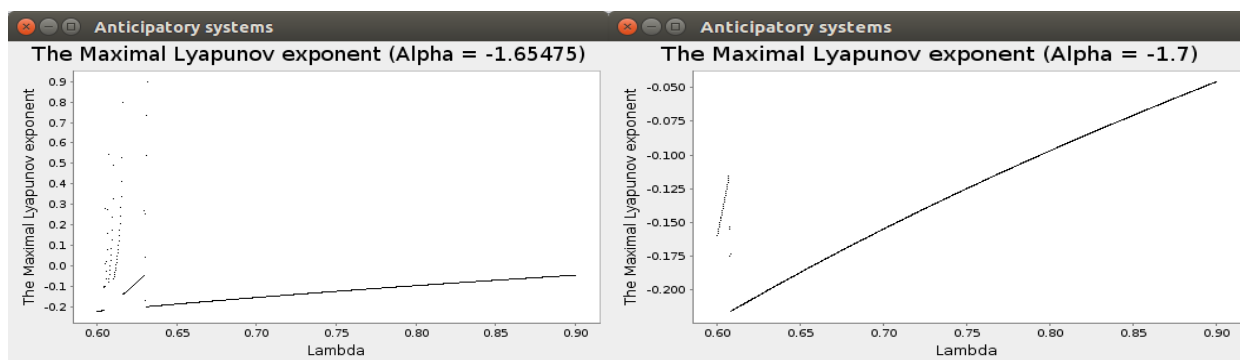
д)

е)

Рисунок 4.6. Залежність старших ПЛ від параметра λ при різних значеннях α .

в) $\alpha = -1.50475$; г) $\alpha = -1.5545$; д) $\alpha = -1.57475$; е) $\alpha = -1.605$;

Аналізуючи результати, наведені на рис. 4.6 б-ж, бачимо, що області регулярної поведінки стають все вужчими та перехід між ними відбувається із стрибками старшого ПЛ. На них видно, що показник стрімко зростає, досягаючи додатних значень та породжуючи, відтак, хаотичність в динаміці.



ж)

з)

Рисунок 4.6. Залежність старших ПЛ від параметра λ динамічної системи при різних значеннях α . ж) $\alpha = -1.65475$; з) $\alpha = -1.7$

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ

1. запропоновано архітектуру узагальненої схеми побудови карти заданих показників ДСА у багатопоточному обчислювальному середовищі. В якості таких показників, зокрема, виступають: періоди циклічних траєкторій (для карт динамічних режимів), показники Ляпунова, узагальнені розмірності Рені станів ДСА;
2. наведено результати комп'ютерного моделювання систем з антисипацією у вигляді карт динамічних режимів, старшого показника Ляпунова та таких узагальнених розмірностей Рені, як фрактальних та інформаційних;
3. за допомогою перетинів карт старших ПЛ лініями в просторі управляючих параметрів наведено результати чисельних експериментів переходу динаміки СА із регулярного режиму в квазіперіодичний (хаотичний)

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вирішено проблему розвинення методів аналізу нелінійних дискретних систем із антисипацією наряду із скороченням їх часових обчислювальних витрат.

Основні наукові результати полягають в наступному:

- Досліджено простір параметрів нелінійної дискретної антисипаційної системи. Встановлено області періодичної поведінки відповідної динамічної системи із запізненням з оператором еволюції, заданим багатозначним оператором. Результати представлені у вигляді карт динамічних режимів узагальнених на системи такого типу.
- В ході дослідження граничних множин систем такого типу, сформульовано та доведено достатню умову виникнення самоподібних структур в цих множинах для випадку, коли антисипаційна система зводиться до динамічної системи із оператором Хатчинсона з двома селекторами. Використовуючи апарат символічної динаміки, отримані співвідношення для оцінок розмірності Хаусдорфа зверху граничних множин таких систем для випадків, коли нелінійні селектори оператора Хатчинсона відповідної динамічної системи не перетинаються та із самоперетинами частинного випадку. Для відповідного співвідношення частинного випадку із самоперетинами селекторів показано єдиність розв'язку та отримано необхідну умову його існування.
- Для нелінійних дискретних антисипаційних систем, зведених до динамічних систем із оператором Хатчинсона, представлено та доведено обчислювальні складності: побудови станів; траєкторій; відстані між станами для пошуку періодів циклічних траєкторій. Зменшено обчислювальні витрати в ході моделювання таких систем за рахунок представлення їх станів мультимножинами.

- Узагальнено методи побудови карт динамічних режимів та старшого показника Ляпунова на системи із сильною антисипації у Хаусдорфовому метричному просторі.
- На основі узагальнених методів було побудовано відповідні карти за допомогою розробленого багатопоточного програмного забезпечення на кластерній обчислювальній архітектурі СКІТ. При цьому використовувалась система із сильною антисипацією першого порядку.

Всі обчислювальні експерименти проводилися на розподілених кластерних ресурсах інституту кібернетики ім. Глушкова та Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського».

Результати досліджень можуть бути застосовані при системному аналізі моделей процесів та явищ, котрі передбачають наявність випереджаючої складової. Моделювання таких об'єктів потребує значних обчислювальних витрат. Тому, узагальнені методи та розроблені засоби значно спростять подальший аналіз таких систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Аналіз логістичного антисипаційного рівняння із сильною антисипацією. *Наукові вісті НТУУ “КПІ”*. **4**, 91–96 (2012)
2. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Класифікація операторів однієї дискретної антисипаційної системи першого порядку. *Системні дослідження та інформаційні технології*. **1**, 97–106 (2013)
3. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Багатопоточні комп’ютерні обчислення у дослідженні нелінійних динамічних систем. *Проблеми програмування*. **3**, 109–116 (2013)
4. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Про оцінки розмірностей атракторів дискретних динамічних систем із антисипацією. *Математичні машини і системи*. **4**, 161–168 (2013)
5. Lazarenko S.V., Makarenko A.S.: Computational Complexities of Modeling of Dynamical Systems with Anticipation. *Journal of Automation and Information Sciences*. **51**(4), 55–65 (2019). doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.50
6. Лазаренко, С. В.: До питання обчислювальної складності при дослідженні динаміки систем із антисипацією. *Математичні машини і системи*. **1**, 28–35 (2019)
7. Rosen, R.: Anticipatory systems. Philosophical, mathematical and methodological foundations. Pergamon Press Ltd, Oxford (1985)
8. Dubois, D.M.: Introduction to Computing Anticipatory Systems. *International Journal of Computing Anticipatory Systems*, Publ. by Chaos. **2**, 3–14 (1998)
9. Dubois, D.M.: Review of Incursive, Hyperincursive and Anticipatory Systems - Foundation of Anticipation in Electromagnetism. *Computing Anticipatory*

Systems: CASYS'99 – Third International Conference, edited by Daniel M. Dubois, AIP Conference Proceedings, vol. 517, pp. 3–30 (2000)

10. Dubois, D.M.: Computing Anticipatory Systems with Incursion and Hyperincursion. Computing Anticipatory Systems: CASYS'97 – 1st International Conference. Edited by Daniel M. Dubois, Published by The American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings, vol. 437, pp. 3–29 (1998)
11. Dubois, D.M.: Boolean Soft Computing by Non-linear Neural Networks with Hyperincursive Stack Memory. Invited paper in Computing Intelligence: Soft Computing and Fuzzy-Neuro Integration with Applications, Edited by Okayay Kaynak, Lotfi A. Zadeh, Burhan Turksen, Imre J. Rudas, NATO ASI Series, Series F: Computer and System Science, **162**, 333–351. Springer-Verlag (1998)
12. Dubois, D.M.: Mathematical Foundations of Discrete and Functional Systems with Strong and Weak Anticipations. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2684. Springer, Berlin, Heidelberg (2003). doi: https://doi.org/10.1007/978-3-540-45002-3_7.
13. Ernst von Glasersfeld: Anticipation in the Constructivist Theory of Cognition. Computing Anticipatory Systems, 38–47 (1998)
14. Riegler, A.: The role of Anticipation in Cognition. Computing Anticipatory Systems, 534–541 (2001)
15. Heather, M.A., Rossiter, B.N.: Locality, Weak or Strong Anticipation and Quantum Computing. I. Non-locality in Quantum Theory. International Journal Computing Anticipatory Systems. **13**, 307–326 (2002)
16. Heather, M.A., Rossiter, B.N.: Locality, Weak or Strong Anticipation and Quantum Computing. II. Constructivism with Category Theory. International Journal Computing Anticipatory Systems. **13**, 327–339 (2002)

17. Doniec, A., Mandiau, R., Piechowiak, S., Espié, S.: Anticipation based on constraint processing in a multi-agent context. *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (JAAMAS)*. **17**, 339–361 (2008)
18. Davidsson, P., Astor, E., Ekdahl, B.: A Framework for Autonomous Agents based on the Concept of Anticipatory Systems. *Cybernetics and Systems'94*. Edited by R. Trappi, World Scientific, 1427–1434 (1994)
19. Burke, M.E.: Properties of Derived Scalar Anticipatory Systems. *Computing Anticipatory Systems: CASYS'01 – 5th International Conference*, AIP Conference Proceedings, vol. 627, pp. 49–58 (2002)
20. Burke, M.E.: Scalar Weak Anticipatory Systems. *Computing Anticipatory Systems: CASYS 2001 – 5th International Conference*, Conf. Proc, vol. 627, pp. 85–94, 13–18 August 2001.
21. Burke, M.E.: Further Properties of Derived Scalar Strong Anticipatory Systems. *Computing anticipatory systems: CASYS'03 – Sixth International Conference*, AIP Conference Proceedings, vol. 718, pp. 219–227 (2004)
22. Burke, M.E.: Avoiding Extinction in a Managed Single Species Population Model by Means of Anticipative Control. *AIP Conference Proceedings*, vol. 839, 273 (2006). doi: [10.1063/1.2216636](https://doi.org/10.1063/1.2216636).
23. Burke, M.E.: On the Dynamics of an Incursion describing the Interactions between functionally differentiated Subsystems of a discrete-time Anticipatory Systems. *AIP Conference Proceedings*, vol. 1303. pp. 74–83 (2010). doi: <https://doi.org/10.1063/1.3527188>.
24. Tsirigotis, G., Bandekas, D., Pogaridis, D., Lazaro, J.L.: The Anticipatory Aspect in Neural Network Control. ISSN 1392–1215 *Elektronika ir Elektrotechnika*. Nr 2(58), vol. 170, *Elektronika*, pp. 10–13 (2005)
25. Leydesdorff, L.: Hyperincursion and the Globalization of a Knowledge-Based Economy, In: D. M. Dubois (Ed.) *Proceedings of the 7th Intern. Conf. on Computing Anticipatory Systems CASYS'05*, Liège, Belgium, 8–13 August

2005. American Institute of Physics Conference Proceedings, vol. 839, pp. 560–569. Melville, NY (2006)
26. Leydesdorff, L.: The Communication of Meaning in Social Systems: A Simulation Study of the Dynamics of Intentionality in Social Interactions. Computing Anticipatory Systems: CASYS'07, 8th International Conference, pp. 33–49 (2008)
 27. Leydesdorff, L.: Redundancy in Systems which Entertain a Model of Themselves: Interaction Information and the Self-Organization of Anticipation, Entropy, vol. 12 (1), pp. 63–79 (2010). doi:10.3390/e12010063.
 28. Leydesdorff, L.: Can Intellectual Processes in the Sciences Also Be Simulated? The Anticipation and Visualization of Possible Future States, Scientometrics, vol. 105 (3), pp. 2197–2214 (2015). doi: 10.1007/s11192-015-1630-6.
 29. Leydesdorf, L., Johnson, M., Ivanova, I.: Toward a Calculus of Redundancy: Signification, Codification, and Anticipation in Cultural Evolution. Journal of the Association for Information Science and Technology, 69 (10), pp. 1181–11921 (2018). doi:10.1002/asi.24052.
 30. Makarenko, A.: Anticipating in modeling of large social systems – neuronets with internal structure and multivaluedness. International Journal of Computing Anticipatory Systems. **13**, 77–92 (2002)
 31. Makarenko, A., Stashenko, A.: Some two-steps discrete-time anticipatory models with “boiling” multivaluedness. Daniel M.Dubois (ed.) AIP Conference Proceedings, vol. 839, pp. 265–272 (2006)
 32. Макаренко, О.С., Крушинський, Д.А., Гольденгорін, Б.І.: Модель клітинного автомата з антисипацією. Наукові вісті НТУУ “КПІ”. 1, 30–35 (2009)
 33. Makarenko, A.: Different type of chaotic behavior for different space and time scales in complex systems. Proceedings INDS'09 Second Int, Workshop on

- Nonlinear Dynamics and Synchronization, Klagenfurt, Austria, pp. 60–64 (2009)
34. Makarenko, A.: Toward Decision-Making Considerations on the base of Society Models with Anticipation. Proceed. Third Int. Conf. Human Centered Process, June 2008, Delft, The Netherland, Ed.: Telecom Bretagne, pp. 25–34 (2008)
 35. Makarenko, A., Goldengorin, B., Krushinskii, D.: Game ‘Life’ with Anticipation Property. Lecture Notes Computer Science, **5191**, 77–82 Springer, Berlin, Heidelberg (2008)
 36. Krushinski, D., Makarenko, A.: Cellular automata with anticipation: examples and presumable applications. Computing Anticipatory Systems, AIP Conf. Proceed. Series. ed. D. Dubois, vol. 1303, pp. 246–254 (2010)
 37. Makarenko, A.: Some Distributed Systems with Anticipation. International Journal of Computing Anticipatory Systems, vol. 24, pp. 21–32 (2010)
 38. Makarenko, A.: General Problems of Sustainable Development and Transformation Processes in Large Socio – Economic Systems. 5th International Vilnius Conference EURO Mini Conference “Knowledge-Based Technologies and OR Methodologies for Strategic Decisions of Sustainable Development” (KORSD-2009) Vilnius, Lithuania, pp. 159–163, 30 September – 3 October 2009
 39. Makarenko, A.: Some Distributed Systems with Anticipation. International Journal of Computing Anticipatory Systems, vol. 24, pp. 21–32 (2010)
 40. Lazarenko, S., Makarenko, A.: Investigation of Complex Multivalued Solutions in Discrete Dynamical Systems with Anticipation. International Conference on Computing Anticipatory Systems: CASYS’11, August 8–13 2011.

41. Makarenko, A., Lazarenko, S.: About a few weak anticipatory systems. The 12th Conference Mathematics in Technical and Natural Sciences, Krynica, September 4–10 2011.
42. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Математическое моделирование систем с сильной антисипацией. Международная научно-методическая конференция «Информационно-вычислительные технологии и моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования», ПГУАС, Пенза, 9–14 декабря 2013.
43. Zamenopoulos, Th., Alexiou, K.: Towards an anticipatory view of design. *Design Studies*, **28**(4), 411–436 (2007). doi: <https://doi.org/10.1016/j.destud.2007.04.001>.
44. Лоскутов, А.Ю.: Динамических хаос. Системы классической механики. *Успехи физических наук*, Т. 177 (9), 989–1015 (2007)
45. Devaney, R.L.: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1989)
46. Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., Stacey, P.: On Devaney's Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly*, vol. 99 (4), 332–334 (1992)
47. Борисович, Ю.Г., Гельман, Б.Д., Мышкис, А.Д., Обуховский, В.В.: Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. ЛИБРОКОМ, Москва (2011)
48. Половинкин, Е.С.: Многозначный анализ и дифференциальные включения. Физматлит, Москва (2014)
49. Marchaud, A. Sur les champs des demi-cônes et les équations différentielles du premier ordre. *Bull. Soc. math. France*, vol. 62, 1–38 (1934).
50. Zaremba, S.C. Sur les équations au paratingent. *Bull. Sei. Math*, vol. 60, №5, 139–160 (1936).

51. Благодатских, В.И.: Некоторые результаты по теории дифференциальных включений (обзор). *In: Summer School on ordinary differential equations. Brno*, 29–67 (1975).
52. Aubin, J.-P., Cellina, A.: Differential inclusions. P.: *Univ. Paris IX Dauphine* (1983)
53. Филиппов, А.Ф.: Дифференциальные уравнения с многозначной разрывной правой частью. *Доклады Академии Наук СССР*, том 151, №1, 65–68 (1963).
54. Филиппов, А.Ф.: Об условиях существования решений многозначных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, том 13, №6, 1070–1078 (1977).
55. Благодатский, В.И.: Достаточное условие оптимальности. *Дифференциальные уравнения*, том 9, № 3, 416–422 (1973)
56. Пічкур, В.В.: Дослідження задач практичної стійкості диференціальних включень. Київський національний університет імені Т.Шевченка, Київ (2005)
57. Гаращенко, Ф.Г., Пічкур, В.В.: Оптимальні оцінки практичної стійкості правих частин диференціальних включень. *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 1, 104–114 (2004).
58. Башняков, О.М., Гаращенко, Ф.Г., Пічкур, В.В.: Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. Київський національний університет імені Т.Шевченка, Київ (2000).
59. Мышкис, А.Д.: Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. *Успехи мат. наук*, т. 4, № 5, 99–141 (1949)
60. Бекларян, Л.А.: Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений и их приложений. Групповой подход. *Современная математика. Фундаментальные направления*. Том 8, 1–145 (2004).

61. Зверкин, А.М., Каменский, Г.А., Норкин, С.Б., Эльсгольц, Л.Э.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. *Успехи Математических Наук*, том 17, выпуск 2(104), 77–164. (1962)
62. Пименов, В.Г., Короткий, Д.А.: О решении систем дифференциальных уравнений с опережением и запаздыванием. *Известия Уральского государственного университета*. **4**, 113–139 (2006)
63. Короткий, Д.А.: Системы с опережением и запаздыванием: численное решение. *Известия института математики и информатики*. Ижевск. 2 (36), 185–188 (2006)
64. Feigenbaum, M.J.: Universal Behavior in Nonlinear Systems. *Los Alamos Science*, vol. 1 (1), 4–27 (1980)
65. Кузнецов, С.П.: Динамический Хаос. Изд. 2. Издательство физико-математической литературы (2006)
66. Mandelbrot, B.B.: The fractal geometry of nature. New York: W.H. Freeman and Company (1982)
67. Falconer, K.: Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. John Wiley and Sons Ltd., England (1990)
68. Barnsley, M.F.: Fractals everywhere. Second edition. Academic Press, San Diego, California (1993)
69. Кроновер, Р.М.: Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. ПОСТМАРКЕТ, Москва (2000)
70. Hutchinson, J. E.: Fractals and Self-Similarity, *Indiana Univ. Math. Journal*. **30**, No. 5, 713–747 (1981)
71. Moran, P.A.P.: Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Proc. Cambridge Philos. Soc*, **42**, 15–23. (1946)
72. Barnsley, M.F.: Fractal Image Compression. *Notices of American Mathematical Society*, **43**(6) (1996)

73. Maaruf, A., Clarkson, T.G.: Fractal image compression. Proc. 1st Seminar on Information Technology and its Application (ITA'91), Markfield Conf. Centre, Leicester, U.K., 29 September 1991
74. Maaruf, A., Clarkson, T.G.: Fractal image compression. *Fractals* 2,3, 417–421 (1994)
75. Ngai, Sze-man, Wang, Yang: Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps. *J. London Math. Soc.* **63**(3), 655–672 (2001)
76. Deng QiRong, Harding, J., Hu TianYou: Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps. *J. Science in China Series A: Mathematics*. January, **52**(1), 119–128 (2009)
77. Moran, M.: Hausdorff measure of infinitely generated self-similar sets. *Monatsh Math.* **122**: 387–399 (1996)
78. Barany, B.: On the Hausdorff Dimension of a Family of Self-Similar Sets with Complicated Overlaps. *Fund. Math.* **206**, 49–59 (2009)
79. Barany, B.: Dimension of the generalized 4-corner set and its projections. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. **32**(4), 1190–1215 (2012). doi:10.1017/S014338571100023X
80. Simon K., Solomyak, B., Urbanski, M.: Hausdorff dimension of limit sets for parabolic IFS with overlaps. *Pacific J. Math.* **201**(2), 441–478 (2001)
81. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Особливості математичного моделювання систем із антисипацією та проблеми, що постають в ході нього. Аналіз, моделювання, управління. Вип. 1. Збірник наукових праць відділу прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ». с. 177, Київ (2013)
82. Lalley, S.P.: β -expansions with deleted digits for Pisot numbers. *Trans American Mathematical Society*. **349**, 4355–4365 (1997)

83. Stojanovski, T., Kocarev, L., Harris, R.: Applications of Symbolic Dynamics in Chaos Synchronization. *IEEE transactions on circuits and systems-I: Fundamental theory and applications*, **44**(10), 1014–1018 (1997)
84. Cafaro, C., Lord, W.M., Sun, J., Bollt E.M.: Causation entropy from symbolic representations of dynamical systems. *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science*, **25**(4) (2015). doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4916902>.
85. Lau, K.-S., Ngai, S.-M.: Multifractal measures and a weak separation condition. *Advances in Mathematics*. **141**(1), 45–96 (1999)
86. Zerner, M.: Weak separation properties of self-similar sets. *Proc. Amer. Math Soc.* **124**, 3529–3539 (1996)
87. Lallay, S.P., Gatzouras, D.: Hausdorff and Box Dimensions of Certain Self-A ne Fractals. *Indiana University Mathematics Journal*, **41**(2) (1992).
88. Natoli, Ch.: *Fractals as fixed points of Iterated Function systems*. The university of Chicago, Department of Mathematics (2012)
89. Лазаренко, С.В.: До обчислювальних проблем антисипаційних систем. Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Київ. 27–28 грудня 2018
90. Díaz Josep, Carme Torras: A personal account of Turing's imprint on the development of computer science. *Computer Science Review*. **6**, 225–234 (2012). doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cosrev.2012.11.001>
91. Cover, M.Th., Gacs, P., Gray, R.: Kolmogorov's Contributions to Information Theory and Algorithmic Complexity. *The Annals of Probability*. **17** (1989). doi: <http://dx.doi.org/10.1214/aop/1176991250>.
92. Kouemou, G.L.: History and Theoretical Basics of Hidden Markov Models. (2011). doi: <http://dx.doi.org/10.5772/15205>.
93. Eigenmann, R., Lilja, D.: *Von Neumann Computers* (1998). doi: <http://dx.doi.org/10.1002/047134608X.W1704>.

94. Колмогоров, А.Н.: Теория информации и теория алгоритмов. Наука, Москва (1987)
95. Марков, А.А., Нагорный, Н.М.: Теория алгоритмов. Наука, Москва (1984)
96. Aspnes, J.: Notes on Computational Complexity Theory CPSC 468/568: Spring (2017)
97. Mitchell, M.: Computation in Cellular Automata: A Selected Review (1996). doi: <http://dx.doi.org/10.1002/3527602968.ch4>.
98. Bovet D.P., Crescenzi P.: Introduction to the theory of complexity. New York, Prentice-Hall International (1994)
99. Кузнецов, А.П., Кузнецов, С.П., Седова, Ю.В.: О свойствах скейлинга идентичных связанных логистических отображений с двумя типами связи без шума и под воздействием шума. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. **14**(5), 94–109 (2006)
100. Кузнецов, А.П., Седова, Ю.В., Сатаев, И.Р.: Устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. **12**(5), 46–57 (2004)
101. Кузнецов, А.П., Кузнецов, С.П., Сатаев, И.Р., Седова, Ю.В.: Критическая точка накопления fold-flip бифуркаций и критический квазиаттрактор (обзор и новые результаты). Нелинейная динамика. **4**(2), 113–132 (2008)
102. Кузнецов, А.П.: Наглядные образы хаоса. *Соросовский образовательный журнал*, **6**(11), 104–110 (2000)
103. Кузнецов, А.П., Савин, А.В., Тюрюкина, Л.В.: Введение в физику нелинейных отображений. Научная книга, Саратов (2010)

104. Шве́ц А. Ю., Мака́сеев А. М. Атлас карт динамических режимов неидеальной системы «маятник-электродвигатель». *Збірник праць Інституту математики НАН України*. **5**(3), 465–480 (2010)
105. Feudel, U., Grebogi, C.: Multistability and the control of complexity. *Chaos* (Woodbury, N.Y.). **7**, 597–604 (1998). doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.166259>.
106. Pisarchika, A.N., Feudel, U.: Control of multistability. *Physics Reports* **540**, 167–218 (2014)
107. Awrejcewicz, J., Krysko, A.V., Erofeev, N.P., Dobriyan, V., Barulina M.A., Krysko, V.A.: Quantifying Chaos by Various Computational Methods. Part 1: Simple Systems. *Entropy*. **20**(3) (2018); <https://doi.org/10.3390/e20030175>
108. Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn, J.-M.: Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P.I: Theory. P. II: Numerical application. *Meccanica*, **15**, 9–30 (1980)
109. Сергієнко, І.В.: Наукові ідеї академіка В.М. Глушкова та Розвиток сучасної інформатики. *Вісник НАН України*. **11**, 35–60 (2008)
110. Коваль, В.Н., Рябчун, С.Г., Сергиенко, И.В., Якуба, А.А.: Суперкомпьютерные кластерные системы – организация вычислительного процесса. *Проблеми програмування*. **2-3**, 197–210 (2006)
111. Тульчинский, В.Г, Тульчинский, П.Г.: Применение суперкомпьютеров СКИТ для разработки и выполнения параллельных геофизических программ. *Кибернетика и системный анализ*. **6**, 64–78 (2009)
112. Zomaya, A.Y.: Parallel Computing for Bioinformatics and Computational Biology: Models, Enabling Technologies and Case Studies. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2050). doi: 10.1002/0471756504

113. Молчанов, И.Н., Химич, А.Н., Попов, А.В., Чистякова, Т.В., Герасимова, Т.А.: Интеллектуальный MIMD-компьютер для эффективного исследования и решения задач. Искусственный интеллект. **4**, 149–158 (2004)
114. Молчанов, И.Н., Химич, А.Н., Попов, А.В., Чистякова, Т.В., Яковлев, М.Ф., Герасимова, Т.А., Нестеренко, А.Н.: Об эффективной реализации вычислительных алгоритмов на MIMD-компьютерах. Искусственный интеллект. **3**, 175–184 (2005)
115. Химич А.Н., Попов, А.В., Чистякова, Т.В., Яковлев, М.Ф.: Программное обеспечение для автоматического исследования и решения задач на MIMD-компьютерах. Праці міжнародної конференції “50 років Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України” – Київ: Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, сс. 328–335 (2008)
116. Химич, А.Н., Молчанов, И.Н., Попов, А.В., Чистякова, Т.В., Яковлев, М.Ф.: Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики: монография. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины. Наукова думка, Київ (2008)
117. Гергель, В.П.: Теория и практика параллельных вычислений: учебное пособие. БИНОМ. Лаборатория знаний (2007)
118. Разжевайкин, В.Н.: Модели динамики популяций. Российская академия наук, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына. Вычислительный центр Российской академии наук, Москва (2006)
119. Гуц, А.К.: Моделирование социально-психических процессов. *Математические структуры и моделирование*. **1**, 12–14 (1998)
120. Паутова, Л.А., Гуц, А.К.: Использование теории хаоса и странных аттракторов в исследованиях индивидуального и социального сознания. *Математические структуры и моделирование*. **13**, 126–131 (2004)

121. Гуц, А.К.: Социальная психология и компьютерное моделирование. *Математические структуры и моделирование*. **13**, 85–89 (1999)
122. Гасников, А.В., Дорн, Ю.В., Нестеров, Ю.Е., Шпирко, С.В.: О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков. *Математическое моделирование*. **26**(6), 34–70 (2014)
123. Гасников, А.В., Двуреченский, П.Е., Дорн, Ю.В., Максимов, Ю.В.: Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и модели стабильной динамики. *Математическое моделирование*, **28**(10), 40–64 (2016)
124. Верейкина, М.Б.: Нелинейные краевые задачи: теория и компьютерная графика. *Вісник КНУ ім. Т.Шевченка*. **5**, 17–31 (2001)
125. Лазаренко, С.В.: Моделювання сильних антисипаційних систем за допомогою кластерних обчислень. Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування», с. 20. 16–18 травня 2012
126. Lazarenko, S.: Cluster computing for some nonlinear multiple-value mapping. 2nd International conference on Nonlinear analysis and applications / on memory of V.S. Melnik. p. 62. April 4–6 2012
127. Заславский, Г.М., Сагдеев, Р.З.: Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. Наука, Москва (1988)
128. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. Москва (1988)
129. Ахромеева, Т.С., Курдюмов, С.П., Малинецкий, Г.Г., Самарский, А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. Москва (1992)

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Lazarenko S.V., Makarenko A.S.: Computational Complexities of Modeling of Dynamical Systems with Anticipation. *Journal of Automation and Information Sciences*. **51**(4), 55–65 (2019). doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.50. (Іноземне видання, реферується в SCOPUS).
2. Лазаренко С. В.: До питання обчислювальної складності при дослідженні динаміки систем із антисипацією. *Математичні машини і системи*. **1**, 28–35 (2019) (Фахове видання, включено до бази РІНЦ eLIBRARY.ru)
3. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Аналіз логістичного антисипаційного рівняння із сильною антисипацією. *Наукові вісті НТУУ “КПІ”*. **4**, 91–96 (2012) (Фахове видання)
4. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Класифікація операторів однієї дискретної антисипаційної системи першого порядку. *Системні дослідження та інформаційні технології*. **1**, 97–106 (2013) (Фахове видання)
5. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Багатопоточні комп’ютерні обчислення у дослідженні нелінійних динамічних систем. *Проблеми програмування*. **3**, 109–116 (2013) (Фахове видання)
6. Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.: Про оцінки розмірностей атракторів дискретних динамічних систем із антисипацією. *Математичні машини і системи*. **4**, 161–168 (2013) (Фахове видання)
7. Lazarenko, S., Makarenko, A.: Investigation of Complex Multivalued Solutions in Discrete Dynamical Systems with Anticipation. International Conference on Computing Anticipatory Systems: CASYS’11, August 8–13 2011 (заочно)
8. Makarenko, A., Lazarenko, S.: About a few weak anticipatory systems. The 12th Conference Mathematics in Technical and Natural Sciences. Krynica, September 4–10 2011 (доповідь)

9. *Lazarenko, S.*: Cluster computing for some nonlinear multiple-value mapping. 2nd International conference on Nonlinear analysis and applications / on memory of V.S. Melnik, Kiev, April 4– 6 2012 p. 62 (доповідь)
10. *Лазаренко, С.В.* Моделювання сильних антисипаційних систем за допомогою кластерних обчислень. Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування», Київ, 16–18 травня 2012. с. 20 (доповідь)
11. *Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.*: Математическое моделирование систем с сильной антисипацией. Международная научно-методическая конференция «Информационно-вычислительные технологии и моделирование в решении задач строительства, техники, управления и образования», ПГУАС. Пенза. 9–14 декабря 2013 (заочно)
12. *Лазаренко, С.В., Макаренко, О.С.*: Особливості математичного моделювання систем із антисипацією та проблеми, що постають в ході нього. Аналіз, моделювання, управління. Вип. 1. Збірник наукових праць відділу прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ». Київ, 2013. с. 177 (доповідь)
13. *Лазаренко, С.В.*: До обчислювальних проблем антисипаційних систем. Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Київ, 27–28 грудня 2018 (заочно)

ДОДАТОК Б

Довідка про впровадження результатів у навчальний процес

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ * МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ



ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ім. Ігоря Сікорського”

№ 105/4040

“17” 09

2019



Затверджую

Заступник Директора ІПСА НТУУ «КПІ»

у навчально-науковій роботі,

д.т.н., професор

В.Д. Романенко

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи
Лазаренка Сергія Вікторовича
у навчальний процес ІПСА НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»

У процесі виконання дисертаційної роботи Лазаренка Сергія Вікторовича отримав ряд нових наукових результатів стосовно розвинення методів аналізу систем із антисипацією. Отримані результати впроваджено у навчальний процес кафедри Математичних методів системного аналізу Інституту прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського».

Зокрема, узагальнено методи побудови карт динамічних режимів та старшого показника Ляпунова на системи із багатозначними операторами еволюції. З метою мінімізації обчислювальних витрат в ході моделювання таких систем запропоновано та обґрунтовано представлення їх станів мультимножинами. Для систем із багатозначними операторами еволюції, нелінійні селектори яких перетинаються в частинних випадках, методом символічної динаміки отримано оцінку Хаусдорфової міри зверху та відповідне співвідношення для оцінки Хаусдорфової розмірності зверху. Основні результати з дослідження моделей із антисипацією використовувались при описі можливостей розгляду соціально-економічних систем у наступних навчальних дисциплінах:

- Моделювання соціальних процесів
- Моделювання сталого розвитку
- Глобальне моделювання сталого розвитку
- Моделювання систем

Професор ІПСА, д.ф.-м.н.

О.С. Макаренко